Amérique du Sud 2003 II. LE GRAND SAUT : UNE CHUTE LIBRE ? (5,5 points)
Correction http://labolycee.org ©

1. Recherche de la trajectoire d'une chute libre avec vitesse initiale.

1.1.1. Un objet est en chute libre, dans un référentiel terrestre, si il n'est soumis qu'à l'action de son poids.

1.1.2. __**Système :**__ {sauteur} __**Référentiel :**__ le sol (référentiel terrestre supposé galiléen)

__**Inventaire des forces :**__ le poids, les autres forces sont négligées la chute étant considérée comme libre.

D'après la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m.\vec{a}$

$m.\vec{g} = m.\vec{a}$ donc $\boxed{\vec{g} = \vec{a}}$

Par projection suivant l'axe Ox horizontal: $\mathbf{a_x = 0}$

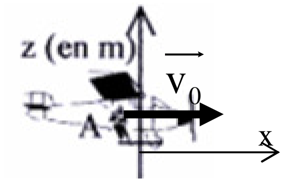
Par projection suivant l'axe Oz vertical vers le haut $\mathbf{a_z = -g}$

1.2. *Ne pas confondre le vecteur vitesse $\vec{v}$, qui varie au cours du temps, et le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ qui est un vecteur constant dépendant des conditions initiales. Ici inutile de « primitiver » !*

Le vecteur $\vec{v}_0$ est horizontal.

$v_{0x} = v_0$

$v_{0z} = 0$



1.3.1.

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ donc par intégration : } \vec{v}\begin{cases} v_x(t) = Cte = v_{0x} = \mathbf{v_0} \\ v_z(t) = -g.t + Cte = -g.t + v_{0z} = \mathbf{-g.t} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \quad \text{donc par intégration } \overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0.t + Cte = v_0.t + x_0 = \mathbf{v_0.t} \\ z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + Cte = -\frac{1}{2}.g.t^2 + z_0 = \mathbf{-\frac{1}{2}.g.t^2 + h_0} \end{cases}$$

G centre inertie du sauteur

1.3.2. on a $x(t) = v_0.t$ soit $t = \frac{x(t)}{v_0}$ qu'on remplace dans l'expression de z(t)

$\mathbf{z(x) = -\frac{1}{2}.g.\frac{x(t)^2}{v_0^2} + h_0}$ Cette équation correspond à un **arc de parabole**.

1.3.3. Pour quelle durée a-t-on $z(t) = h_1$?

$z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + h_0 = h_1$

$t = \sqrt{\frac{2(h_0 - h_1)}{g}}$ $t = \sqrt{\frac{2\times(3,0\times10^3 - 1,0\times10^3)}{9,80}} = \mathbf{20\ s}$

2. La chute est-elle réellement libre ?

2.1.1. $E_M = E_C + E_{PP}$

à t = 0s au point A
altitude $z_0 = h_0 = 3,0\times10^3$ m
le sauteur a une vitesse v_0

à $t = t_1$ au point B
à l'altitude $z_1 = h_1 = 1,0\times10^3$ m
le sauteur a une vitesse v_1 = ?

Exprimons la variation d'énergie cinétique entre les points A et B:

$\Delta E_C = \Sigma W(\overrightarrow{F_{ext}})$, comme seule la force poids s'exerce : $\Delta E_C = W(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$

Les coordonnées: -du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x = x_B - x_A\ ;\ z = z_B - z_A)$

- du vecteur $\vec{P}$ $(P_x = 0\ ;\ P_z = -m.g)$

$\Delta E_C = (x_B - x_A) . P_x + (z_B - z_A) . P_Z$

$\Delta E_C = -(z_B - z_A).m.g$

$\mathbf{\Delta E_C = m.g.(z_A - z_B)}$

Or $\Delta E_{PP} = E_{PPB} - E_{PPA} = m.g.(z_B - z_A)$
donc $\Delta E_{PP} = -\Delta E_C$, le système a gagné autant d'énergie cinétique qu'il a perdu d'énergie potentielle de pesanteur. La variation d'énergie mécanique vaut $\Delta E_M = \Delta E_{PP} + \Delta E_C = 0$. Elle ne varie pas.

2.1.2. $\Delta E_C = m.g.(z_A - z_B)$ expression établie à la question précédente
$z_A = h_0$ et $z_B = h_1$
$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA}$

$$\frac{1}{2}.m.v_1^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^2 = m.g.(h_0 - h_1)$$

on divise tout par m et on multiplie tout par deux:

$$v_1^2 = \mathbf{2}.g.(h_0 - h_1) + v_0^2$$

$$v_1 = \sqrt{2.g.(h_0 - h_1) + v_0^2}$$

$$v_1 = \sqrt{2 \times 9{,}80 \times (3{,}0.10^3 - 1{,}0.10^3) + \left(\frac{130}{3{,}60}\right)^2}$$ *il faut convertir v_0 en $m.s^{-1}$*

$\mathbf{v_1 = 2{,}0 \times 10^2\ m.s^{-1}}$

2.2. Cet écart est dû à l'existence d'une force de frottement exercée par l'air sur le sauteur, qui le ralentit, et que nous avons négligé lors du calcul de v_1.
On ne peut donc pas considérer la chute comme libre au sens des physiciens.
La vitesse a atteint sa valeur maximale v'_1 (ou limite), la force de frottement est compensée par la force poids, le sauteur cesse d'accélérer.

3. Ouverture du parachute.

3.1. analyse dimensionnelle:
F est une force exprimée en newtons, soit, avec les unités de base du système international, en $kg.m.s^{-2}$.
$[F] = M.L.T^{-2}$
ρ est la masse volumique de l'air, exprimée en $kg.m^{-3}$ donc $[\rho] = M.L^{-3}$
v² est le carré de la vitesse en $m^2.s^{-2}$ donc $[v^2] = [v].[v] = L^2.T^{-2}$

$$F = \frac{1}{2}.K.\rho.v^2$$

$$M.L.T^{-2} = [K].\ M.L^{-3}.\ L^2.T^{-2}$$
$$L = [K].\ L^{-1}$$
$$[K] = L^2$$

K s'exprime en m²

3.2. DIFFICILE

<u>Système:</u> {sauteur+parachute} **<u>Référentiel:</u>** le sol (référentiel terrestre supposé galiléen)

<u>Inventaire des forces :</u> -le poids $\vec{P}$ de direction verticale et sens vers le bas,
- la force de frottement due à l'air de direction verticale et sens vers le haut (sens opposé à la vitesse).

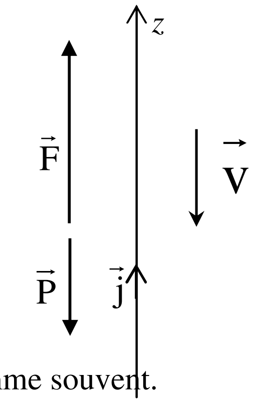
D'après la deuxième loi de Newton: $\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}$ (1)
On conserve le repère utilisé précédemment, l'axe vertical est orienté positivement vers le haut.

$$P_z + F_z = m.a_z = m.\frac{dv_z}{dt}$$

$$-m.g + \frac{1}{2}.K.\rho.v^2 = m.\frac{dv_z}{dt}$$

on divise par m : $$-g + \frac{K.\rho.v^2}{2m} = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\frac{dv_z}{dt} - \frac{K.\rho.v^2}{2m} = -g$$



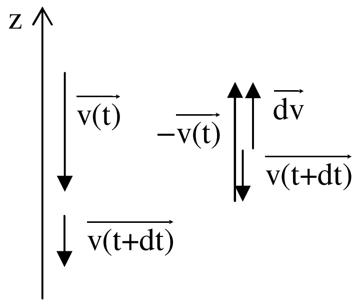
arrivé là, on pense qu'il y a un problème. Mais il ne faut pas confondre $\frac{dv_z}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ comme souvent.

v est la valeur de la vitesse tandis que v_z est la coordonnée du vecteur vitesse

Que signifie $\frac{dv}{dt}$? C'est la variation de vitesse notée dv pendant la courte durée dt.

dv = v(t+dt) – v(t)

Ici le parachute ralentit fortement le sauteur lors de son ouverture, la vitesse diminue alors v(t+dt) < v(t), donc dv < 0 et $\frac{dv}{dt} < 0$.



exemple numérique : dv = 10 – 30 = – 20 $m.s^{-1}$

Concernant $\frac{dv_z}{dt}$: dv_z est la variation de la coordonnée v_z du vecteur vitesse

$dv_z = v_z(t+dt) - v_z(t)$

en regardant le schéma ci-contre, on voit que v_z devient moins négative

donc $dv_z > 0$

exemple numérique : $dv_z = -10 - (-30) = +20\ m.s^{-1}$

alors $\frac{dv_z}{dt} > 0$

FINALEMENT, $\frac{dv_z}{dt} = -\frac{dv}{dt}$

reprenons l'équation différentielle $\frac{dv_z}{dt} - \frac{K.\rho.v^2}{2m} = -g$

$$-\frac{dv}{dt} - \frac{K.\rho.v^2}{2m} = -g$$

on retrouve : $\frac{dv}{dt} + \frac{K.\rho.v^2}{2m} = g$

3.3. Lorsque la vitesse est stabilisée alors $\frac{dv}{dt} = 0$.

$$\frac{K.\rho.v_2^2}{2m} = g$$

$$v_2^2 = \frac{2.g.m}{K.\rho}$$

soit $v_2 = \sqrt{\frac{2.g.m}{K.\rho}}$

$v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}80 \times 90}{38 \times 1{,}3}}$ = **6,0 m.s^{-1}**

3.4. $v_{2z} = \frac{dz}{dt}$, où $\frac{dz}{dt}$ représente le coefficient directeur de la droite représentative de z = f(t).

à l'aide des points appartenant à cette droite : M (t = 80 s ; z = 760 m) et N (t = 180 s ; z = 160 m)

on trouve $v_{2z} = \frac{760 - 160}{80 - 180}$

donc $v_{2z} = -6{,}0$ (coordonnée verticale du vecteur vitesse $\vec{v}_2$)

$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2z}^2} = \sqrt{(-6{,}0)^2}$

v_2 = 6,0 m.s^{-1} Ce résultat est cohérent avec la valeur de v_2 obtenue à la question précédente.