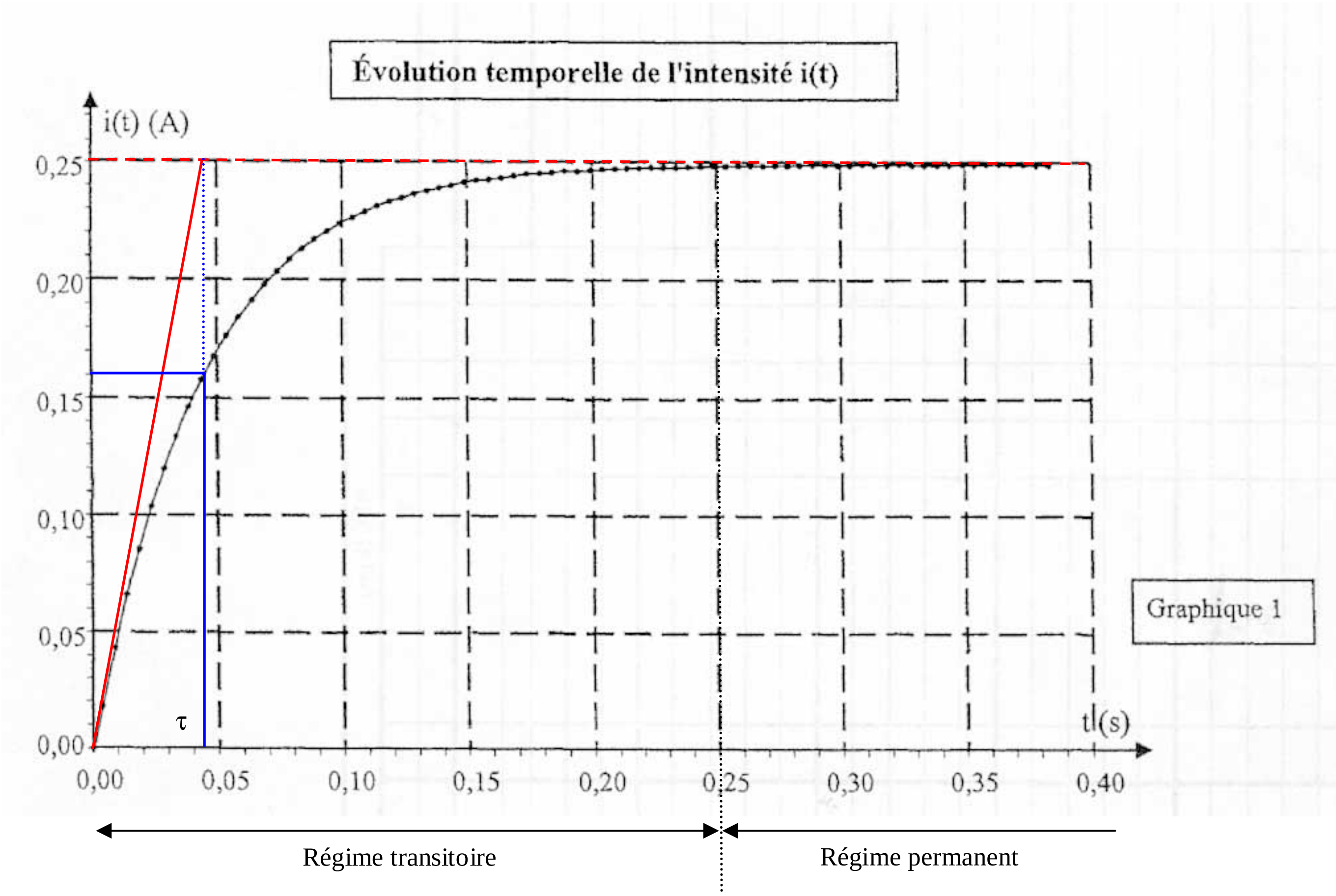
Une équation au service des Sciences Physiques

PARTIE A: DANS LE DOMAINE DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES

1. Étude expérimentale

1.1. L'établissement du courant dans la bobine n'est pas instantané. Durant le régime transitoire, l'intensité du courant i(t) augmente jusqu'à une valeur constante I = 0,25 A. Graphiquement on peut estimer la durée du régime transitoire à **Δt = 0,25 s**.



1.2.1. L'expression littérale de la constante de temps τ en fonction des paramètres du circuit est:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R+r}}$$

1.2.2. Détermination de l'inductance L.

La relation précédente donne: **L = τ.(R + r)**. Connaissant R = 12 Ω et r = 11,8 Ω, il faut évaluer τ pour déterminer L.

1ère méthode: tangente à l'origine: la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale i = I = 0,25 A en un point d'abscisse t = τ. Graphiquement, on lit: **τ = 0,045 s = 45 ms**.

2nde méthode: établissement du courant à 63 % dans la bobine: pour t = τ, i(τ) = 0,63.I

i(τ) = 0,63 × 0,25 = 0,16 A. On trace la droite i(τ) = 0,16 A qui coupe la courbe i(t) pour un point d'abscisse t = τ. Graphiquement, on lit: **τ = 0,045 s = 45 ms**.

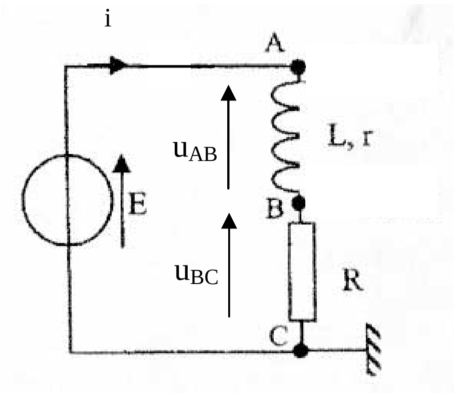
Remarque: on peut vérifier que pour Δt ≥ 5τ soit Δt ≥ 0,23 s le régime permanent est pratiquement établi.

Finalement: $L = 45.10^{-3} \times (12 + 11,8) = 1,1$ H $\boxed{\textbf{L = 1,1 H}}$

2. Modèle théorique

2.1. La loi d'additivité des tensions donne: $E = u_{AB} + u_{BC}$.

Compte tenu du sens du courant, imposé par le générateur, il vient:



$u_{AB} = r.i + L.\dfrac{di}{dt}$

$u_{BC} = R.i$

donc: $E = r.i + L.\dfrac{di}{dt} + R.i$

finalement: $\boxed{\dfrac{di}{dt} + \left(\dfrac{R+r}{L}\right).i = \dfrac{E}{L}}$

2.2. Par identification avec l'équation (1): $\mathbf{\dfrac{dx}{dt}} + \alpha\mathbf{x} = \beta$, pour laquelle $x \Leftrightarrow i$, il vient: $\boxed{\alpha = \dfrac{R+r}{L}}$ et $\boxed{\beta = \dfrac{E}{L}}$

2.3. L'équation horaire i(t) s'obtient par identification avec la solution: $\mathbf{x(t)=\dfrac{\beta}{\alpha}.\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right)}$$

Cette solution valide l'équation établie en **2.1** si $\dfrac{di}{dt} + \left(\dfrac{R+r}{L}\right).i$ est égal à $\dfrac{E}{L}$:

On a: $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{R+r} \times \dfrac{R+r}{L}.e^{-\frac{R+r}{L}.t} = \dfrac{E}{L}.e^{-\frac{R+r}{L}.t}$

Et: $\left(\dfrac{R+r}{L}\right).i = \left(\dfrac{R+r}{L}\right).\dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right) = \dfrac{E}{L}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right)$

Soit $\dfrac{di}{dt} + \left(\dfrac{R+r}{L}\right).i = \dfrac{E}{L}.e^{-\frac{R+r}{L}.t} + \dfrac{E}{L}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right)$

Finalement : $\dfrac{di}{dt} + \left(\dfrac{R+r}{L}\right).i = \dfrac{E}{L}$ donc la solution i(t) valide bien l'équation établie en 2.1.

2.4. En posant: $\tau = \dfrac{L}{R+r} = \dfrac{1}{\alpha}$ il vient: $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

3. Confrontation des résultats expérimentaux avec le modèle théorique.

3.1. L'intensité I en régime permanent est obtenue pour $t \rightarrow \infty$.

Or $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ donc: $i(t \rightarrow \infty) = \boxed{I = \dfrac{E}{R+r}}$

Application numérique: $\mathbf{I} = \dfrac{6,1}{12+11,8} = \mathbf{2,6.10^{-1}}$ **A**.

La valeur lue sur le graphique est $\mathbf{2,5.10^{-1}}$ **A** . Les deux valeurs sont voisines (écart relatif de 4 %).

3.2. Pour $t = \tau$, on a: $i(\tau) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-1}\right) = \dfrac{E}{R+r} \times 0,63 = I \times 0,63$

$$\mathbf{i(\tau) = 1,6.10^{-1}\ A.}$$

Cette valeur est égale à la valeur expérimentale obtenue sur le graphique à la question **1.2.2**.

PARTIE B : DANS LE DOMAINE MÉCANIQUE:

1. Exploitation de l'équation v(t) modélisée.

1.1. Par identification de la solution $v(t) = 1{,}14.\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$

avec la solution $\mathbf{x(t)=}\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{.}(1 - e^{-\alpha.t})$,

on a: $\boxed{\frac{\beta}{\alpha} = 1{,}14}$ et $\boxed{\alpha = \frac{1}{0{,}132} = 7{,}58}$ (on conserve 3 chiffres significatifs)

Le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est homogène à une vitesse (le terme entre parenthèses étant sans dimension) donc le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ s'exprime en $\mathbf{m.s^{-1}}$.

Remarques: ce rapport est égal à la vitesse limite de la bille lorsque $t \to \infty$, valeur que l'on peut lire sur le graphe. Par ailleurs, la justification n'était pas demandée.

1.2. Méthode 1: L'équation **(3)** $v(t) = 1{,}14.\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$ est la solution d'une équation différentielle du type:

$$\mathbf{\frac{dx}{dt} + \alpha x = \beta \ (1).}$$

Par identification, $x \Leftrightarrow v$, soit $\frac{dv}{dt} + \alpha.v = \beta$

Or $\alpha = 7{,}58$ comme établi en 1.1. Et $\frac{\beta}{\alpha} = 1{,}14$, soit $\beta = 1{,}14.\alpha$ alors $\boldsymbol{\beta} = 1{,}14 \times 7{,}58 = \mathbf{8{,}64}$.

En remplaçant α et β par leurs valeurs, on retrouve l'expression proposée: $\boxed{\frac{dv}{dt} + 7{,}58\ v = 8{,}64}$.

Méthode 2: L'équation **(3)** $v(t) = 1{,}14.\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$, peut s'écrire $v(t) = 1{,}14 - 1{,}14.\ e^{-\frac{t}{0{,}132}}$

Donc $\frac{dv}{dt} = -1{,}14 \times \left(-\frac{1}{0{,}132}\right).e^{-\frac{t}{0{,}132}} = 8{,}64.\ e^{-\frac{t}{0{,}132}}$

Exprimons maintenant $\frac{dv}{dt}$ + 7,58 v et vérifions que cette somme vaut 8,64.

$$\frac{dv}{dt} + 7{,}58\ v = 8{,}64.\ e^{-\frac{t}{0{,}132}} + 7{,}58\ (1{,}14 - 1{,}14.\ e^{-\frac{t}{0{,}132}})$$

$$= 8{,}64.\ e^{-\frac{t}{0{,}132}} + 7{,}58 \times 1{,}14 - 7{,}58 \times 1{,}14.\ e^{-\frac{t}{0{,}132}}$$

$= 8{,}64$ donc l'équation (3) est bien solution de l'équation différentielle proposée.

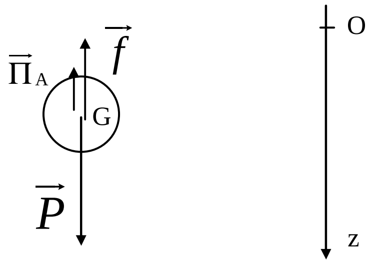
2. Étude du phénomène physique.

2.1. Le système étudié est la bille de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les forces appliquées à la bille sont:

- le poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ direction verticale et sens vers le bas;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = - m_{\text{fluide déplacé}}.\vec{g}$ direction verticale et sens vers le haut;
- la force de frottement $\vec{f}$, direction verticale et sens vers le haut (opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$)

Schéma des forces sans souci d'échelle:



2.2. Appliquons au système bille la seconde loi de Newton: $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{f} = m.\overrightarrow{a_G}$

3. Exploitation de la modélisation

3.1. Soit (Oz) un axe vertical orienté vers le bas. la projection de la seconde loi de Newton selon cet axe donne:

avec les coordonnées $P_z + \Pi_{A_z} + f_z = m.\dfrac{dv_z}{dt}$

avec les valeurs littérales de ces coordonnées $P - \Pi_A - f = m.\dfrac{dv}{dt}$

$m.g - m_{\text{fluide déplacé}}.g - k.v = m.\dfrac{dv}{dt}$

Or $m_{\text{fluide déplacé}} = \rho_{\text{fluide}}.V$ donc il vient: $g.(m - \rho_{\text{fluide}}.V) - k.v = m.\dfrac{dv}{dt}$

finalement, en divisant par m, on a: $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = \left(1 - \dfrac{\rho_{\text{fluide}}.V}{m}\right).g}$

3.2. En identifiant l'équation précédente avec $\mathbf{\dfrac{dx}{dt} + \alpha x = \beta}$ on tire:

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{m}} \text{ et } \boxed{\beta = \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}.V}{m}\right).g}$$

3.3. Si la poussée d'Archimède était nulle: $\Pi_A = 0$, alors $m_{\text{fluide}}.g = 0$ donc $m_{\text{fluide}} = 0$ soit $\rho_{\text{fluide}}.V = 0$.

L'expression de β se simplifie $\beta = \left(1 - \dfrac{0}{m}\right).g$, alors β = g.

$\boldsymbol{\beta}$ **= 9,81 m.s^{-2} .**

Or dans l'équation différentielle $\dfrac{dv}{dt} + 7,58\ v = 8,64$ on constate que: $\beta = 8,64\ m.s^{-2} \neq 9,81\ m.s^{-2}$.

Donc $\boldsymbol{\beta \neq g}$ et la poussée d'Archimède **doit donc être prise en compte**.

Remarque: on peut évaluer la valeur de cette force. En effet: $\beta = \left(1 - \dfrac{\rho_{\text{fluide}}.V}{m}\right).g = \left(g - \dfrac{\Pi_A}{m}\right)$

Donc: $\Pi_A = m.(g - \beta) = 32.10^{-3} \times (9,80 - 8,64) = 3,7.10^{-2}$ N.

PARTIE C : DANS LE DOMAINE DE LA RADIOACTIVITÉ

1.1 $A(t) = A_0 . e^{-\lambda t}$ alors $e^{-\lambda . t} = \frac{A(t)}{A_0}$ donc $-\lambda . t = \ln \frac{A(t)}{A_0}$

$[\lambda . t] = 1 \Leftrightarrow [\lambda] = [t]^{-1} = T^{-1}$

La constante radioactive λ est homogène à l'inverse d'un temps.

1.2 La relation liant λ à la constante de temps τ du radio isotope est: $\boxed{\lambda = \frac{1}{\tau}}$

La loi $A(t) = A_0 . e^{-\lambda t}$ s'écrit alors: $\boxed{A(t) = A_0 . e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

1.3 Pour évaluer la constante de temps τ, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes:

• 1ère méthode: pour $t = \tau$, voir graphe ci-après

on a: $\mathbf{A(\tau)} = A_0 . e^{-1} = 300.10^6 \times 0{,}368 = \mathbf{110\ MBq}$

On trace la droite A = 110 MBq qui coupe le graphe A(t) en un point d'abscisse $t = \tau$.

Graphiquement on a: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{29\ min}$.

• 2nde méthode: tangente à l'origine: la tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses pour une date $t = \tau$.

Graphiquement on a: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{29\ min}$.

La valeur de λ est alors: $\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{29} = \mathbf{3{,}4.10^{-2}\ min^{-1}}$.

Cette valeur est égale à celle donnée dans l'énoncé. ($\lambda = 3{,}40.10^{-2}\ min^{-1}$)

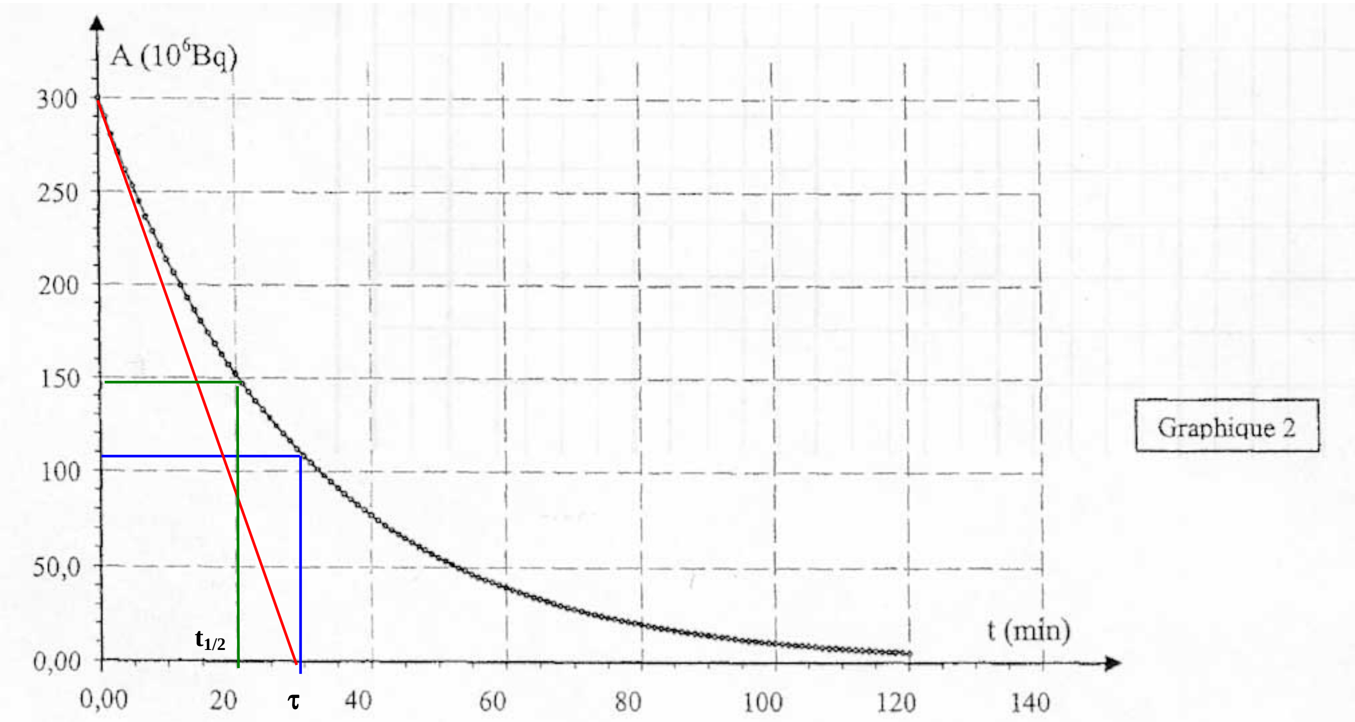
1.4 Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée pour laquelle l'activité atteint la moitié de sa valeur initiale:

$A(t_{1/2}) = A_0 / 2$.

$A(t_{1/2}) = 300.10^6 / 2 = 150$ MBq.

On trace la droite A = 150 MBq qui coupe le graphe A(t) en un point d'abscisse $t = t_{1/2}$.

Graphiquement on lit (en vert): $\mathbf{t_{1/2} = 20\ min}$.



2. La méthode d'Euler permet d'écrire: $x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t$, donc ici: $A(t+\Delta t) = A(t) + \frac{dA}{dt}\Delta t$

L'équation différentielle est $\frac{dA}{dt} + \lambda.A(t) = 0$, donc $\frac{dA}{dt} = -\lambda.A(t)$

il vient: $A(t+\Delta t) = A(t) - \lambda.A(t).\Delta t$

soit $\mathbf{A(t+\Delta t) = A(t). [1 - \lambda.\Delta t]}$

3.1. Pour que la méthode d'Euler donne des résultats corrects il faut que le pas d'itération Δt soit "suffisamment petit" soit ici $\Delta t \ll t_{1/2}$. Or $t_{1/2}$ = 20 min et Δt = 15 min, donc l'inégalité forte précédente n'étant pas respectée, le pas Δt = 15 min n'est pas adapté pour l'étude.

3.2. On choisit Δt = 5 min.

Date (min)	A_{Euler} (Bq)	$A_{théorique}$ (Bq)
0	$3{,}00.10^8$	$3{,}00.10^8$
5	$\mathbf{2{,}49.10^8}$	$2{,}53.\ 10^8$
10	$2{,}07.10^8$	$\mathbf{2{,}14.10^8}$
15	$1{,}72.10^8$	$1{,}80.10^8$

On a: $A_{Euler}(t = 5 \text{ min}) = A(0).[1 - 5.\lambda]$

$A_{Euler}(t = 5 \text{ min}) = 3{,}00.10^8 \times [1 - 5 \times 3{,}40.10^{-2}] = \mathbf{2{,}49.10^8}$ **Bq**

Et $A_{théorique}(t) = A_0.e^{-\lambda.t}$

$A_{théorique}(t = 10 \text{ min}) = 3{,}00.10^8 \times e^{-0{,}034\times 10} = \mathbf{2{,}14.10^8}$ **Bq**

remarque: nous ne tenons pas compte du manque de chiffres significatifs pour t…

3.3 L'écart relatif est défini par : $\frac{\left|A_{Euler} - A_{théorique}\right|}{A_{théorique}} \times 100$

Pour t = 5 min , $\left|\frac{2{,}49.10^8 - 2{,}53.10^8}{2{,}53.10^8}\right| \times 100 = 1{,}58$ %

Pour t = 10 min , 3,27 %

Pour t = 15 min, 4,44 %.

Les écarts relatifs étant inférieurs à 5 %, la valeur de Δt est correctement adaptée pour l'étude.

remarque : le calcul de l'écart pour t = 15 min est suffisant, si il est inférieur à 5% alors les autres écarts le sont aussi forcément. Mais les calculs des écarts pour t = 5 min et t = 10 min permettent de voir si l'on a commis une erreur de calcul au 3.2