1 Oscillateur mécanique

1.a - *(0,2)* Le système étudié est le solide (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Trois forces agissent sur (S):

- **le poids** $\vec{P}$
- **la réaction normale du support** $\vec{R}$**,** verticale et vers le haut car le solide glisse sans frottement
- **la force de rappel du ressort** $\vec{F}$ telle que: $\vec{F} = - k.x.\vec{j}$ où x est l'abscisse du centre d'inertie G du solide.

Les trois forces sont représentées au point G:

(0,2)

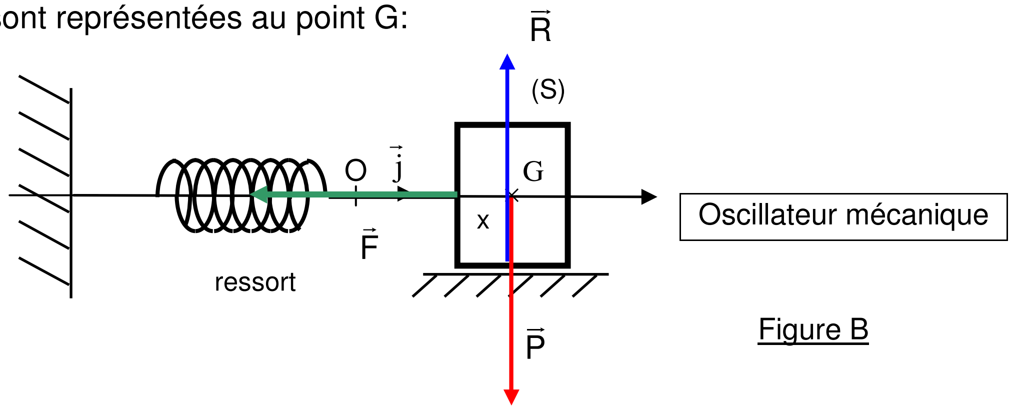


Figure B

1.b - En utilisant la deuxième loi de Newton appliquée au solide (S), $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}$

on a: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}$

En projection sur l'axe $(O\vec{j})$**,** il vient:

$$0 + 0 - k.x = m.a_x$$

or: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

*(0,4)*donc: $\boxed{m.\dfrac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0}$

1.c - Si $x(t) = A.\cos(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$ est une solution, elle doit vérifier l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{dt} = -A.\frac{2\pi}{T}.\sin(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.\cos(2\pi\frac{t}{T} + \varphi) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.x(t)$$

En reportant dans l'équation différentielle:

$$-m.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.x(t) + k.x(t) = 0$$

$$x(t).\left[-m.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + k\right] = 0$$

⇔ En excluant la solution x(t) = 0 (position d'équilibre) il vient:

$$[k - m.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2] = 0$$

$$k = m.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

(0,4) finalement: $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

x(t) est solution de l'équation différentielle si $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

• La relation $T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$ montre que le rapport $\frac{m}{k}$ est homogène au carré d'une durée.

(0,2) Donc le rapport $\frac{m}{k}$ **s'exprime en s².**

• ***(0,2)*** T est la **période propre** de l'oscillateur mécanique.

Application numérique: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$T = 2\pi \times \sqrt{1{,}0.10^{-2}}$

(0,2) **T = 0,63 s**

1.d - Les conditions initiales sont: $x(0) = X_o = +\,4{,}0$ cm et $v_x(0) = 0$ m.s^{-1}.

(0,2)

$x(0) = X_o = A.\cos(\varphi)$

$v_x(0) = 0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = -A.\frac{2\pi}{T}.\sin(\varphi)$ ⇔ $\sin(\varphi) = 0$ ⇔ $\boldsymbol{\varphi = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\varphi = \pi}$

Or à t = 0 $X_o > 0$ donc en supposant A > 0 il faut que $\cos(\varphi) > 0$: la seule solution possible est

(0,2) alors: $\boldsymbol{\varphi = 0}$ (car $\cos(\pi) = -1$)

(0,2) Et si $\boldsymbol{\varphi = 0}$ alors $\boldsymbol{X_o = A}$ (car cos(0) = 1).

Finalement: $\boxed{\mathbf{x(t) = X_o.cos(2\pi\frac{t}{T})}}$

2 Oscillateur électrique

2.a – En identifiant les deux équations différentielles on peut faire les correspondances suivantes entre les grandeurs mécanique et électrique:

	grandeur mécanique	**grandeur électrique**
	$m.\dfrac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$	$L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{C} = 0$
(0,2)	m	L
(0,2)	x(t)	q(t)
(0,2)	k	1 / C

(0,2)Et comme $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$, la grandeur mécanique correspondant à l'intensité instantanée est $\dfrac{dx}{dt}$ soit la vitesse instantanée: $v_x = \dfrac{dx}{dt}$

2.b - En utilisant les similitudes entre les équations différentielles et les conditions initiales, on peut écrire:

(0,2) $x(t) = X_o.\cos(2\pi\dfrac{t}{T})$ pour l'oscillateur mécanique

(0,2) $q(t) = Q_o.\cos(2\pi\dfrac{t}{T'})$ pour l'oscillateur électrique

D'autre part pour les périodes propres:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ pour l'oscillateur mécanique

(0,2) $\boxed{T' = 2\pi\sqrt{LC}}$ pour l'oscillateur électrique

En effet: m ⇔ L et 1 / k ⇔ C.

Application numérique: $T' = 2 \times \pi \times \sqrt{0{,}10 \times 10{,}0.10^{-6}}$

(0,2) Donc **$T' = 6{,}3.10^{-3}$ s = 6,3 ms**

3.- Graphes x(t) et q(t):

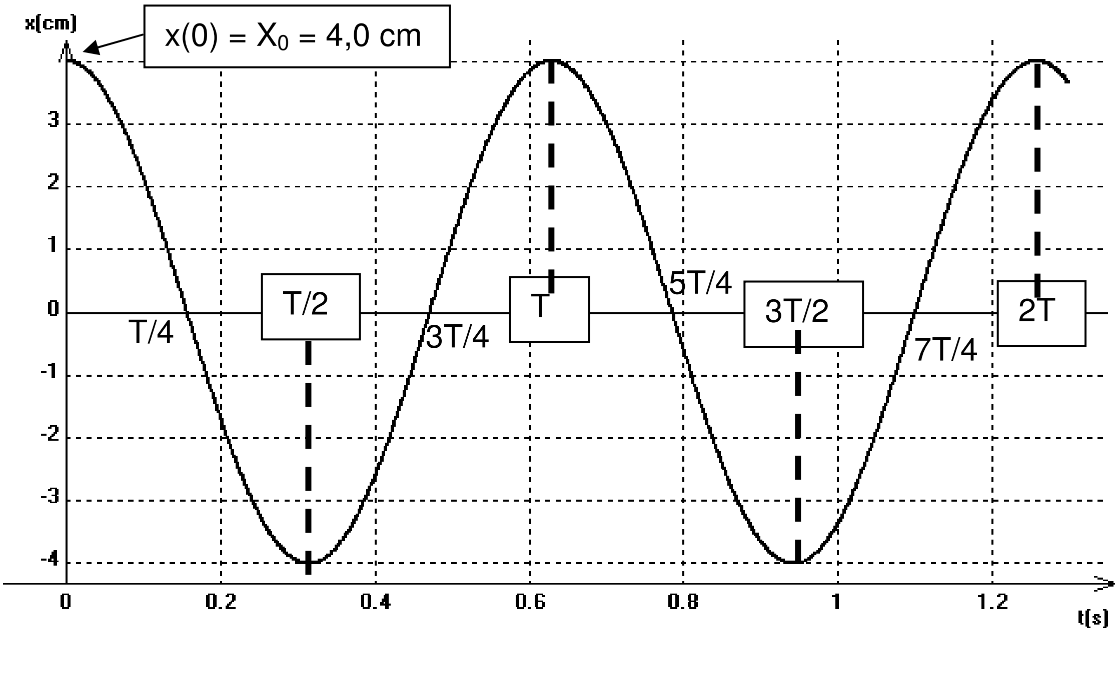
$x(t) = X_0.\cos(2\pi\dfrac{t}{T})$ soit $x(t) = 4{,}0 \cos(2\pi t/0{,}63)$ avec x exprimée en cm et t en s

(0,2)

Pour t = n.T (avec n entier), x est maximale.

Pour t = (2n+1).T/2, x est minimale.

Pour t = (2n+1).T/4, x est nulle.



$q(t) = Q_0.\cos(2\pi\frac{t}{T'})$ soit $q(t) = 10^{-4}\cos(2\pi t/6,3)$ avec t en ms

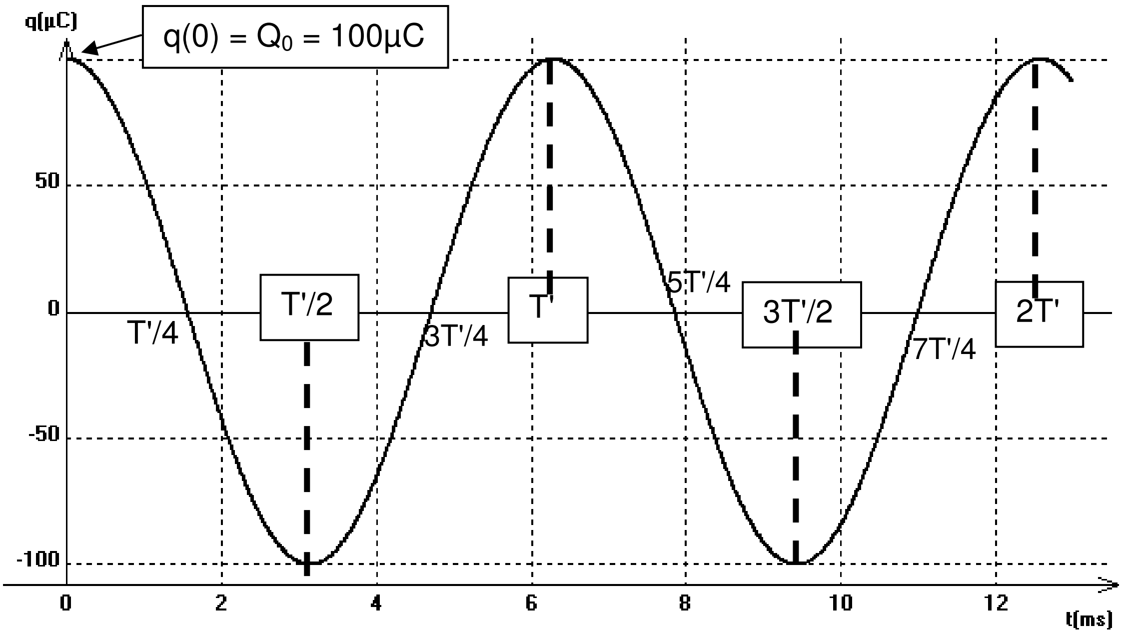
ou $q(t) = 100 \cos((2\pi t/6,3)$ avec t en ms et q en µC.

(0,2)

Pour t = n.T ' (avec n entier), q est maximale.

Pour t = (2n+1).T'/2, q est minimale.

Pour t = (2n+1).T'/4, q est nulle.



4 - ***(0,2)*** Les oscillateurs réels ne sont pas idéaux. En effet il existe toujours des effets dissipatifs d'énergie.
Pour l'oscillateur mécanique, il faut tenir compte des **forces de frottement** :
- solide de (S) sur le support
- fluide de (S) avec l'air.

(0,2) Une partie de l'énergie mécanique est alors dissipée sous forme de chaleur à cause des frottements.

(0,2) Pour l'oscillateur électrique, la résistance de la bobine n'est pas nulle (elle vaut quelques ohms): une partie de l'énergie électromagnétique stockée dans la bobine est dissipée sous forme de chaleur par effet Joule.