

1 Oscillateur mécanique

1.a - (0,2) Le système étudié est le solide (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

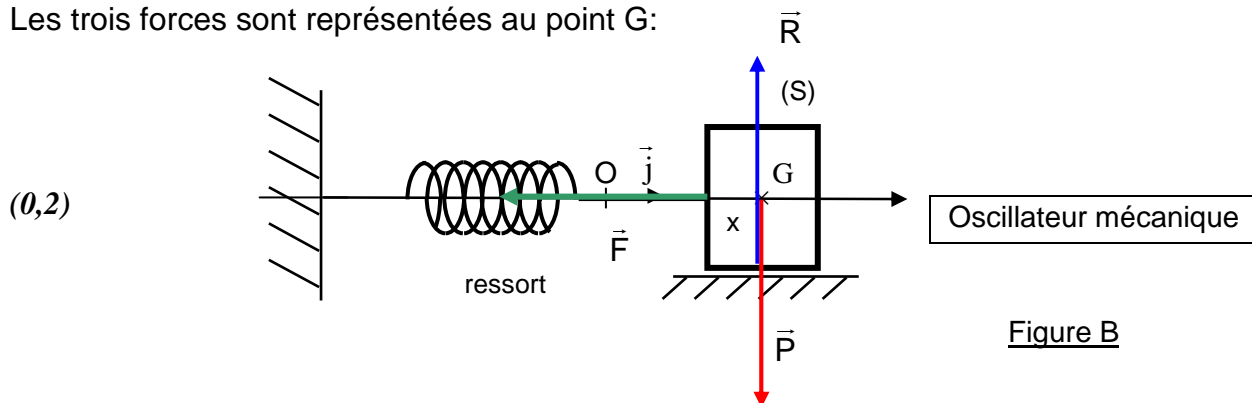
Trois forces agissent sur (S):

- le poids \vec{P}

- la réaction normale du support \vec{R} , verticale et vers le haut car le solide glisse sans frottement

- la force de rappel du ressort \vec{F} telle que: $\vec{F} = -k.x. \vec{j}$ où x est l'abscisse du centre d'inertie G du solide.

Les trois forces sont représentées au point G:



1.b - En utilisant la deuxième loi de Newton appliquée au solide (S), $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m.\vec{a}$

on a: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}$

En projection sur l'axe $(O\vec{j})$, il vient:

$$0 + 0 - k.x = m.a_x$$

or: $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$

(0,4) donc:

$$m. \frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$$

1.c - Si $x(t) = A.\cos(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$ est une solution, elle doit vérifier l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{dt} = -A. \frac{2\pi}{T} . \sin(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A. \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \cos(2\pi\frac{t}{T} + \varphi) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x(t)$$

En reportant dans l'équation différentielle :

$$-m. \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 .x(t) + k.x(t) = 0$$

$$x(t). [-m. \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + k] = 0$$

⇔ En excluant la solution $x(t) = 0$ (position d'équilibre) il vient:

$$\left[k - m \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \right] = 0$$

$$k = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

(0,4) finalement:
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$x(t)$ est solution de l'équation différentielle si $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

• La relation $T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$ montre que le rapport $\frac{m}{k}$ est homogène au carré d'une durée.

(0,2) Donc le rapport $\frac{m}{k}$ **s'exprime en s²**.

• (0,2) T est la **période propre** de l'oscillateur mécanique.

Application numérique:
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi \times \sqrt{1,0 \cdot 10^{-2}}$$

(0,2)
$$T = 0,63 \text{ s}$$

1.d - Les conditions initiales sont: $x(0) = X_0 = +4,0 \text{ cm}$ et $v_x(0) = 0 \text{ m.s}^{-1}$.

(0,2)

$$x(0) = X_0 = A \cdot \cos(\varphi)$$

$$v_x(0) = 0 = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = -A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin(\varphi) \quad \Leftrightarrow \sin(\varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi$$

Or à $t = 0$ $X_0 > 0$ donc en supposant $A > 0$ il faut que $\cos(\varphi) > 0$: la seule solution possible est

(0,2) alors: $\varphi = 0$ (car $\cos(\pi) = -1$)

(0,2) Et si $\varphi = 0$ alors $X_0 = A$ (car $\cos(0) = 1$).

Finalement:

$$x(t) = X_0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

2 Oscillateur électrique

2.a – En identifiant les deux équations différentielles on peut faire les correspondances suivantes entre les grandeurs mécanique et électrique:

	grandeur mécanique	grandeur électrique
	$m. \frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$
(0,2)	m	L
(0,2)	x(t)	q(t)
(0,2)	k	1 / C

(0,2) Et comme $i(t) = \frac{dq}{dt}$, la grandeur mécanique correspondant à l'intensité instantanée est $\frac{dx}{dt}$

soit la vitesse instantanée: $v_x = \frac{dx}{dt}$

2.b - En utilisant les similitudes entre les équations différentielles et les conditions initiales, on peut écrire:

(0,2) $x(t) = X_0 \cdot \cos(2\pi \frac{t}{T})$ pour l'oscillateur mécanique

(0,2) $q(t) = Q_0 \cdot \cos(2\pi \frac{t}{T'})$ pour l'oscillateur électrique

D'autre part pour les périodes propres:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ pour l'oscillateur mécanique

(0,2) $T' = 2\pi \sqrt{LC}$ pour l'oscillateur électrique

En effet: $m \Leftrightarrow L$ et $1/k \Leftrightarrow C$.

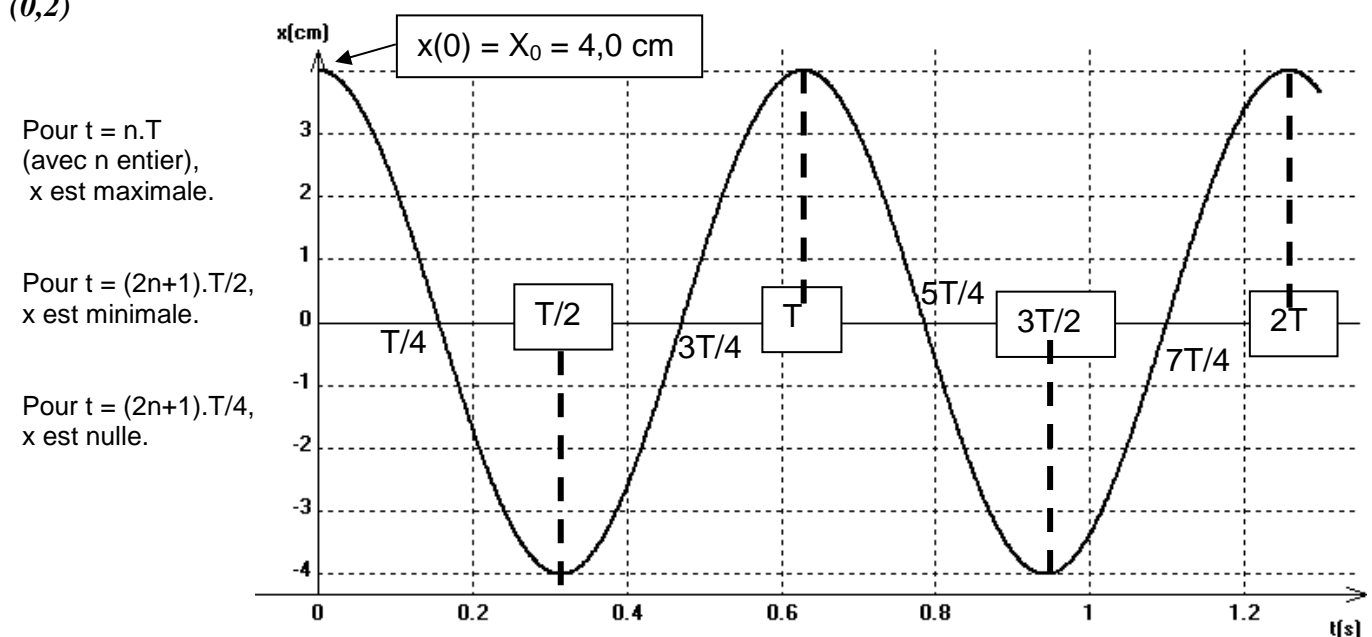
Application numérique: $T' = 2 \times \pi \times \sqrt{0,10 \times 10,0 \cdot 10^{-6}}$

(0,2) Donc $T' = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 6,3 \text{ ms}$

3.- Graphes x(t) et q(t):

$x(t) = X_0 \cdot \cos(2\pi \frac{t}{T})$ soit $x(t) = 4,0 \cos(2\pi t / 0,63)$ avec x exprimée en cm et t en s

(0,2)

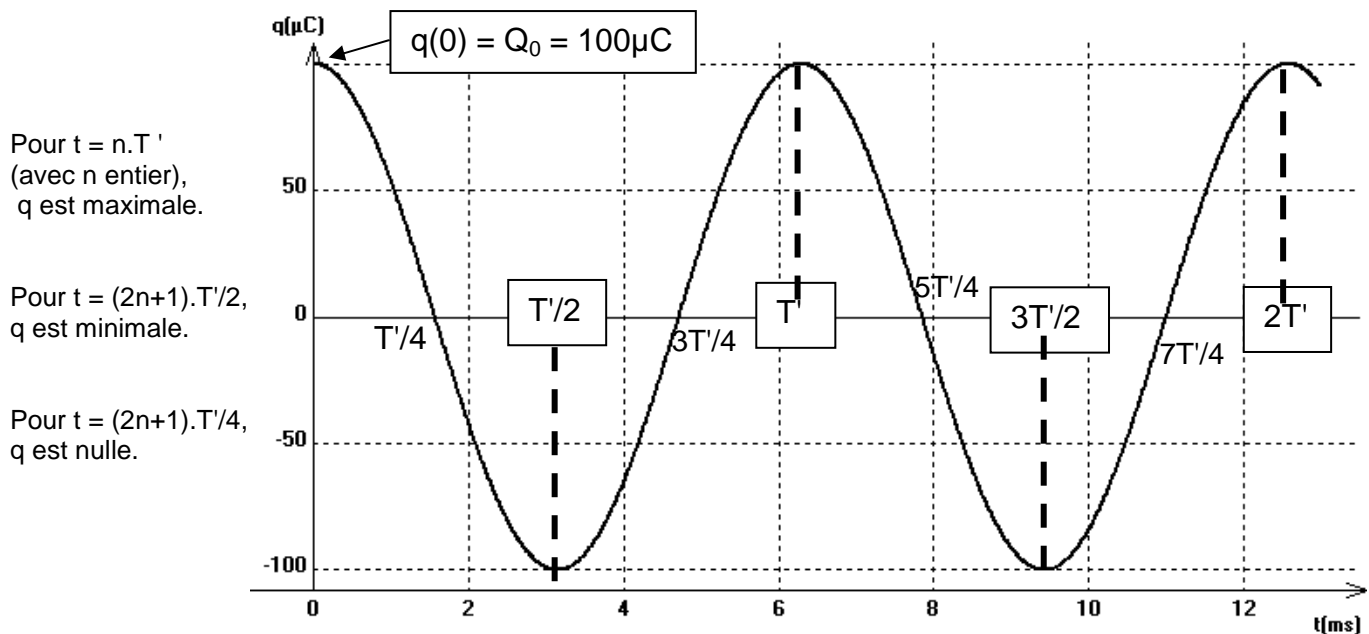


$$q(t) = Q_0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T'}\right)$$

soit $q(t) = 10^{-4} \cos(2\pi t/6,3)$ avec t en ms

ou $q(t) = 100 \cos((2\pi t/6,3)$ avec t en ms et q en μC .

(0,2)



4 - (0,2) Les oscillateurs réels ne sont pas idéaux. En effet il existe toujours des effets dissipatifs d'énergie.

Pour l'oscillateur mécanique, il faut tenir compte des **forces de frottement** :

- solide de (S) sur le support
- fluide de (S) avec l'air.

(0,2) Une partie de l'énergie mécanique est alors dissipée sous forme de chaleur à cause des frottements.

(0,2) Pour l'oscillateur électrique, la résistance de la bobine n'est pas nulle (elle vaut quelques ohms): une partie de l'énergie électromagnétique stockée dans la bobine est dissipée sous forme de chaleur par effet Joule.