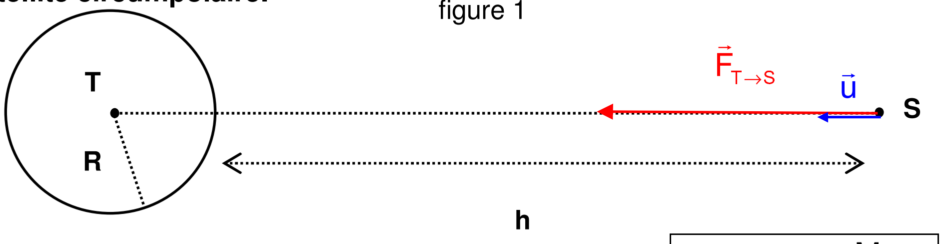
Amérique du Sud 2007- EXERCICE I. ÉTUDE DE SATELLITES D'OBSERVATION (5 points)
CORRECTION © http://Labolycee.org

1. ENVISAT : un satellite circumpolaire.

1.1.1.

figure 1



Expression vectorielle de la force exercée par la Terre T sur le satellite S : $\boxed{\vec{F}_{T\to S} = G\dfrac{m.M}{(R+h)^2}.\vec{u}}$

avec $\vec{u}$ vecteur unitaire orienté de S vers T.

1.1.2. Valeur de la force $F_{T\to S} = G.\dfrac{m.M}{(R+h)^2}$

En exprimant les distances en mètres, on a : $F_{T\to S} = 6{,}67\times10^{-11}.\dfrac{8200\times5{,}98\times10^{24}}{\left(6{,}38\times10^6+800\times10^3\right)^2}$ = **$6{,}34\times10^4$ N**

1.2. Le satellite est étudié dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. La deuxième loi de Newton donne $\vec{F}_{T\to S} = m.\vec{a}$

$G\dfrac{m.M}{(R+h)^2}.\vec{u} = m.\vec{a}$

finalement: $\boxed{\vec{a} = \dfrac{G.M}{(R+h)^2}.\vec{u}}$

1.3. Le vecteur accélération a une valeur constante si l'on considère son altitude h constante.
direction : droite reliant les centres de la Terre et du satellite
sens : vers la Terre

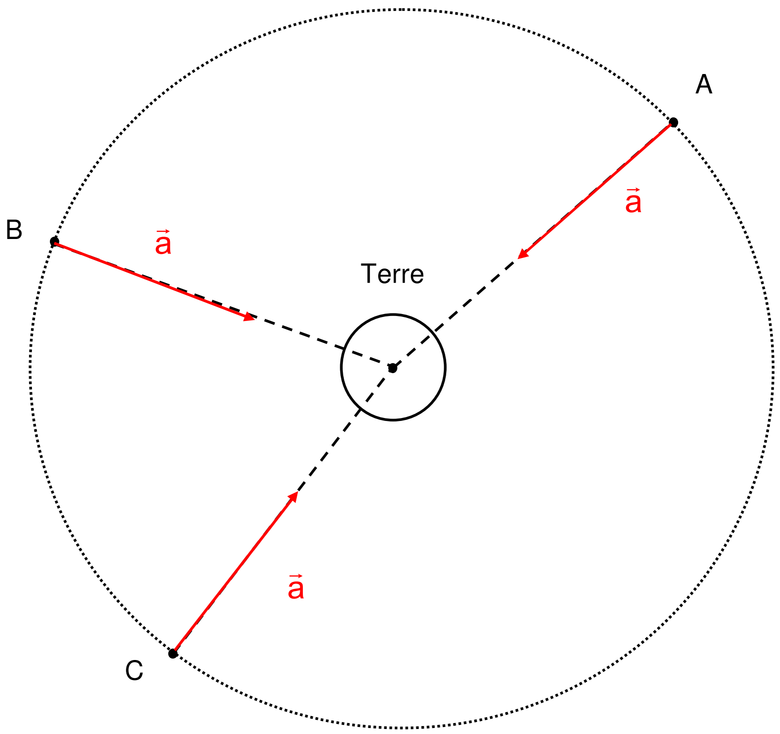


figure 2

1.4. Dans le cas d'un mouvement circulaire et uniforme, le vecteur accélération s'écrit : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{v^2}{(R+h)}.\vec{u}}$

En identifiant les deux vecteurs accélération il vient : $\dfrac{v^2}{(R+h)} = \dfrac{G.M}{(R+h)^2}$

soit finalement $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G.M}{R+h}}}$.

1.5. Application numérique: avec **les distances en mètre** il vient

$$v = \sqrt{\frac{6,67\times10^{-11}\times5,98\times10^{24}}{\left(6,38\times10^{6}+800\times10^{3}\right)}} = 7,45\times10^{3}\ \text{m.s}^{-1} = \mathbf{7,45\ km.s^{-1}.}$$

1.6. Le satellite parcourt le périmètre $2\pi.(R+h)$ de la trajectoire pendant la durée T d'une période à la vitesse v donc

$$v = \frac{2\pi.\ (R+h)}{T} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{T = \frac{2\pi(R+h)}{v}}$$

$$T = \frac{2\pi\times(6,38\times10^{6}+800\times10^{3})}{7,45\times10^{3}} = \mathbf{6,05\times10^{3}\ s}$$ *calcul effectué avec la valeur non arrondie de v*

2. METEOSAT 8 : un satellite géostationnaire.

2.1. Pour être **géostationnaire** un satellite doit avoir :

- une **orbite circulaire** dont le centre est le centre T de la Terre et parcourue dans le même sens que le sens de rotation de la Terre,
- une orbite **contenue dans le plan de l'équateur terrestre**,
- une **période T** égale à la **période de rotation propre T_0 de la Terre** autour de l'axe des pôles.

2.2. La question1.6. donne $T = \frac{2\pi(R+H)}{v}$ donc $T^2 = \frac{4\pi^2(R+H)^2}{v^2}$

La question 1.4 donne $v = \sqrt{\frac{G.M}{R+H}}$ donc $v^2 = \frac{G.M}{R+H}$

En reportant v^2 dans T^2 il vient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R+H)^3}{G.M} \quad \text{et finalement} \quad \boxed{\frac{T^2}{(R+H)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}}$$

En posant r = R + h on retrouve bien la troisième de Kepler avec la constante K telle que $\boxed{K = \frac{4\pi^2}{G.M}}$

$$\mathbf{K} = \frac{4\pi^2}{6,67\times10^{-11}\times5,98\times10^{24}} = \mathbf{9,90\times10^{-14}\ \ S.I}$$

2.3. $\frac{T^2}{(R+H)^3} = K$

$\mathbf{R + H} = \left(\frac{T^2}{K}\right)^{1/3}$, pour METEOSAT 8 qui est un satellite géostationnaire, $T = T_0$ = 1436 min = 86 160 s.

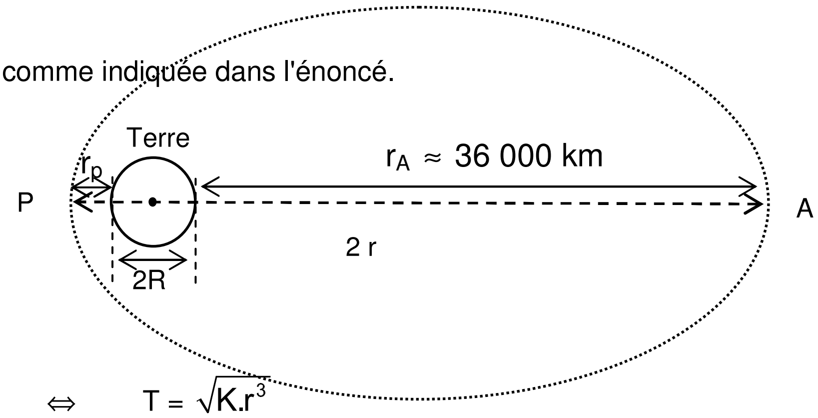
$$\mathbf{R + H} = \left(\frac{T_0^2}{K}\right)^{1/3}$$

$$\mathbf{R + H} = \left(\frac{86160^2}{9,90\times10^{-14}}\right)^{1/3} = \mathbf{4,22\times10^{7}\ m = 4,22\times10^{4}\ km}$$ *calcul effectué avec la valeur non arrondie de K*

$\mathbf{H} = 4,22\times10^{4} - 6,38\times10^{3} = \mathbf{3,58\times10^{4}\ km}$

On retrouve bien une valeur voisine de 36 000 km comme indiquée dans l'énoncé.

2.4.



2.4.1. On a $2r = r_P + 2R + r_A$

avec r_P = 200 km et r_A = 36 000 km

donc $\mathbf{r} = \frac{r_P + 2R + r_A}{2}$

$$r = \frac{200 + 2\times6,38\times10^{3} + 36000}{2} \approx \mathbf{24\ 480\ km}$$

2.4.1. La troisième loi de Képler donne $\frac{T^2}{r^3} = K \quad\Leftrightarrow\quad T = \sqrt{K.r^3}$

$$\mathbf{T} = \sqrt{9,90\times10^{-14}\times(24480\times10^{3})^{3}} = \mathbf{3,81\times10^{4}\ s}$$ *calcul effectué avec la valeur non arrondie de K*