Réunion 2007 **Calculatrice interdite**	**Exercice 2 : Le trébuchet (5,5 points)** **Correction © http://labolycee.org**

Étude du mouvement du projectile après libération

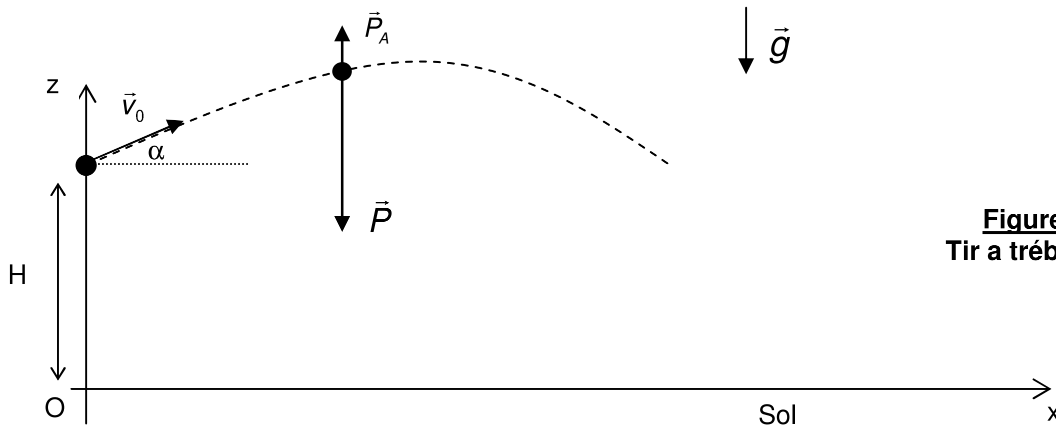

Figure 1.
Tir a trébuchet

1. Caractéristiques **du poids** $\vec{P}$:
- direction: verticale
- sens: vers le bas
- valeur: **P** = m.g

P = 130 × 10 = $\mathbf{1{,}3\times10^3}$ **N**

Caractéristiques de la **poussée d'Archimède** $\vec{P}_A$:
- direction: verticale
- sens: vers le haut
- valeur: $\mathbf{P_A} = \rho_{air}.V.g$

$P_A = 1{,}3 \times 50\times10^{-3} \times 10 = 1{,}3\times5{,}0\times10^{-1} = \mathbf{6{,}5\times10^{-1}}$ **N** (V = 50 L = 50×10^{-3} m^3)

2. Calculons: $\frac{P}{P_A} = \frac{1{,}3\times10^3}{1{,}3\times5{,}0\times10^{-1}} = \frac{1}{5{,}0}\times10^4 = 0{,}20\times10^4 = \mathbf{2{,}0\times10^3}$

Le valeur du poids est environ 2000 fois plus grande que la valeur de la poussée d'Archimède.
On peut donc négliger par la suite la poussée d'Archimède devant le poids.

3. Système : Le projectile Référentiel : le sol , référentiel terrestre supposé galiléen
Dans le cadre de la **chute libre**, le projectile n'est soumis qu'à la force poids.

La 2nde loi de Newton donne: $\vec{P} = m.\vec{a}$ ⇔ m. $\vec{g}$ =m. $\vec{a}$

soit: $\vec{a} = \vec{g}$

En projection selon les axes Ox et Oz du repère choisi et compte tenu du sens du vecteur $\vec{g}$ indiqué sur la figure 1 ci-dessus, il vient:

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

4. Coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0.cos\alpha \\ v_{0z} = v_0.sin\alpha \end{cases}$$

5. À chaque instant, $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donc : $a_x(t)$ = $\dfrac{dv_x(t)}{dt}$ et $a_z(t)$ = $\dfrac{dv_z(t)}{dt}$, en primitivant on a :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t)=Cte_1 \\ v_z(t)=-g.t+Cte_2 \end{cases}$$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ = $\vec{v}(0)$ on a :

v_0 **.** cosα = Cte_1
v_0 **.** sinα = 0 + Cte_2

Finalement :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t)=v_0.\cos\alpha \\ v_z(t)=-g.t+v_0.\sin\alpha \end{cases}$$

6. Comme à chaque instant la composante du vecteur vitesse sur l'axe horizontal est constante ($v_x(t)$ = v_0 **.** cosα = Cte_1), **le mouvement du projectile en projection sur l'axe horizontal est uniforme.**

7. À chaque instant $\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $v_x(t)$ = $\dfrac{dx(t)}{dt}$ et $v_z(t)$ = $\dfrac{dz(t)}{dt}$, en primitivant on a :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t)=v_0.\cos\alpha.t+Cte_3 \\ z(t)=-\dfrac{1}{2}g.t^2+v_0.\sin\alpha.t+Cte_4 \end{cases}$$

Or à t = 0 le projectile est au point de coordonnées (x(0) = 0; z(0) = H) donc:

x(0) = 0 + Cte_3 = 0
z(0) = 0 + 0 + Cte_4 = H

Finalement :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t)=v_0.\cos\alpha.t \\ z(t)=-\dfrac{1}{2}g.t^2+v_0.\sin\alpha.t+H \end{cases}$$

8. On tire de l'expression de x(t) = v_0.cosα.t , le temps t : t = $\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

que l'on reporte dans z(t) : z(x) = $-\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha}+v_0.\sin\alpha.\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}+H$

Finalement: $z(x)=-\dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha+H$

9. L'expression z(x) est de la forme: z(x) = a.x² + b.x + c avec a qui est négatif.
Il s'agit de l'équation d'une parabole dont la concavité est tournée vers le bas (a <0).

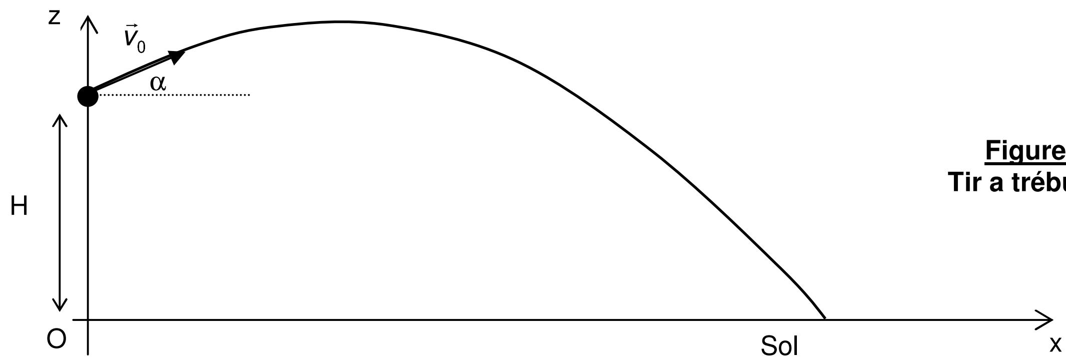

Figure 1.
Tir a trébuchet

10. À la question 8, on a obtenu $z(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha + H$.

En supposant la hauteur de libération H constante, les deux paramètres de lancement qui jouent un rôle dans le mouvement du projectile sont la vitesse initiale v_0 et l'angle de tir α. L'intensité du champ de pesanteur g étant également constante.

11. Le projectile est lancé avec une vitesse initiale horizontale donc $\alpha = 0$; on a alors $\cos\alpha = 1$ et $\tan\alpha = 0$. L'équation de la trajectoire devient :

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} + H$$

L'abscisse de son point de chute est telle que z = 0 soit : $0 = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} + H$

$$\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = H$$

$$x^2 = \frac{2.v_0^2.H}{g}$$

et finalement $\boxed{x = v_0.\sqrt{\frac{2H}{g}}}$ nécessairement positif

12. D'après la réponse du 11., on a $\boxed{v_0 = x.\sqrt{\frac{g}{2.H}}}$

Si x = 100 m alors: $v_0 = 100 \times \sqrt{\frac{10}{2 \times 10}} = 100 \times \sqrt{0,5} = 100 \times 7,1 \times 10^{-1} =$ **71 m.s^{-1}**