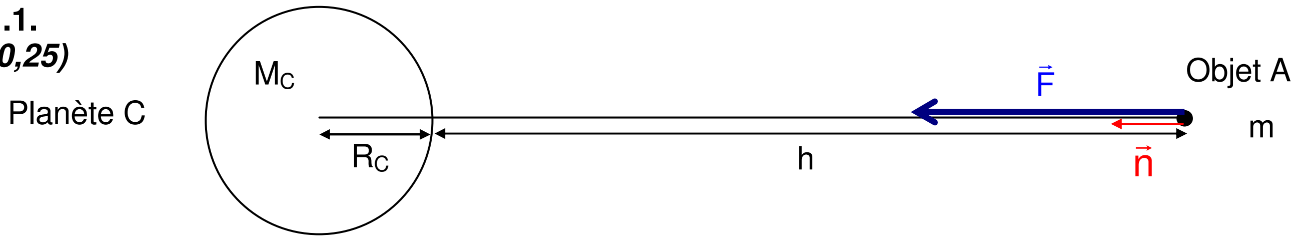
Liban 2008 Exercice I : Découverte d'une exo-planète habitable (5,5 points)
Correction © http://labolycee.org & N.Groussard

Première partie : cette étude se fera dans un référentiel, considéré comme galiléen, lié au centre de la planète C.

1. Étude de la gravitation à la surface de la planète C.

1.1.
(0,25)



1.2. ***(0,25)*** $\boxed{F = G\dfrac{m.M_C}{(R_C+h)^2}}$

1.3. ***(0,25)*** $g = \dfrac{F}{m} = G\dfrac{M_C}{(R_C+h)^2}$ à la surface de la planète h = 0 m donc : $\boxed{g_0 = \dfrac{G.M_C}{R_C^2}}$

2. Vitesse d'un satellite de la planète C

2.1. ***(1)*** D'après la deuxième loi de Kepler (loi des aires), le rayon vecteur $\overrightarrow{CA}$ (reliant les centres de A et C) balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux. L'orbite de A étant **circulaire**, on en déduit que le mouvement est **uniforme**.

Dans le référentiel galiléen lié au centre de la planète C, la deuxième loi de Newton appliquée à l'objet A donne : $\vec{F} = m.\vec{a}$

En considérant le vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigé vers le centre de la planète :

$$\vec{F} = G.\frac{m.M_C}{(R_C+h)^2}.\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{V_1^2}{(R_C + h)}.\vec{n}$$

en reportant : $$G.\frac{m.M_C}{(R_C+h)^2}.\vec{n} = \frac{m.V_1^2}{(R_C+h)}.\vec{n}$$

en projection sur l'axe porté par le vecteur unitaire $\vec{n}$ et en simplifiant par m et par $\dfrac{1}{(R_C+h)}$, il vient : $V_1^2 = \dfrac{G.M_C}{(R_C+h)}$ soit finalement : $\boxed{V_1 = \sqrt{\dfrac{G.M_C}{(R_C+h)}}}$

2.2. ***(0,25)*** Si h est négligeable devant R_C alors $(R_C + h) \approx R_C$ et $\boxed{V_1 = \sqrt{\dfrac{GM_C}{R_C}}}$

3. ***(0,25)*** Pour la planète de masse M et de rayon R , la vitesse de libération V_2 a pour expression $V_2 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ et varie donc comme $\dfrac{1}{\sqrt{R}}$.

Avec G et M = Ctes , si R augmente alors V_2 diminue.

4.1. ***(0,25)*** On a établi en 1.3. : $g_0 = \dfrac{G.M_C}{R_C^2}$ donc $G.M_C = g_0.R_C^2$

En reportant dans $V_2 = \sqrt{\dfrac{2G.M_C}{R_C}}$ il vient : $V_2 = \sqrt{\dfrac{2g_0R_C^2}{R_C}}$ Soit finalement : $\boxed{V_2 = \sqrt{2g_0R_C}}$

4.2. ***(0,25)*** $V_2 = \sqrt{2\times22\times9{,}6.10^6} = 2{,}1.10^4\ m.s^{-1} = 21.10^3\ m.s^{-1} =$ **21 km.s^{-1}** vitesse de libération ***(0,25)*** supérieure à celle sur Terre car $V_2 > 11{,}2\ km.s^{-1}$.

4.3. ***(0,25)*** Une atmosphère est composée d'un mélange de gaz, donc de molécules soumises à l'agitation thermique. Cette agitation thermique augmente avec la température. En imaginant qu'on puisse augmenter la température à la surface de la planète, ces molécules viendraient à avoir une vitesse supérieure à la vitesse de libération, et donc à s'échapper définitivement de la planète ; la planète perdrait son atmosphère.
Si la planète C a une température voisine de celle de la Terre, alors, puisque la vitesse de libération y est supérieure, elle conserve son atmosphère.

Deuxième partie : étude dans un référentiel, considéré comme galiléen, lié au centre de l'étoile E.

1. ***(0,25)*** Dans l'expression $V = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$, la lettre M représente la masse de l'étoile autour de laquelle tourne la planète.

2. Rayon de la trajectoire de la planète B

2.1. ***(0,25)*** Troisième loi de Kepler : le carré de la période de révolution T de la planète autour de son étoile est proportionnelle au cube du rayon r de sa trajectoire :

$\boxed{T^2 = k \times r^3}$ où k est la constante de proportionnalité.

Remarque : cette expression n'est valable que dans le cas d'un mouvement circulaire. Si la trajectoire est une ellipse, on a $T^2 = k{\times}a^3$ où a est le demi-grand axe.

2.2. ***(0,25)*** Pour tout corps en orbite autour de l'étoile E, la constante de proportionnalité k a la même valeur.

Utilisons les données relatives à la planète C pour la déterminer : $k = \frac{T_c^2}{r_c^3}$ avec T_C en jour et r_C en U.A,

il vient : $\mathbf{k} = \frac{12{,}93^2}{(7{,}27.10^{-2})^3} = \mathbf{4{,}35.10^5}$ $d^2.(U.A)^{-3}$. *Avec la planète D, on obtient la même valeur.*

2.3. ***(0,5)*** On a : $k = \frac{T_b^2}{r_b^3} = \frac{T_c^2}{r_c^3}$ donc il vient $r_b^3 = \frac{T_b^2.r_c^3}{T_c^2}$ soit $r_b = \left(\frac{T_b^2.r_c^3}{T_c^2}\right)^{1/3} = \boxed{\left(\frac{T_b}{T_c}\right)^{2/3}.r_c}$

$$\mathbf{r_b} = \left(\frac{5{,}366}{12{,}93}\right)^{2/3} \times 7{,}27.10^{-2} = \mathbf{4{,}04 \times 10^{-2}\ U.A}.$$

Remarque : comme la planète B a la période de révolution la plus petite, il est normal que le rayon de sa trajectoire soit également le plus petit.

Voir l'animation http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.swf

Troisième partie : Détection de l'eau dans l'atmosphère des planètes.

1. ***(0,25)*** « L'énergie des molécules est quantifiée » car les niveaux d'énergie des molécules ne peuvent prendre que des valeurs discrètes bien déterminées.

2. ***(0,25)*** Les longueurs d'onde des radiations visibles sont comprises entre 400 nm et 800 nm soit entre 0,400 µm et 0,800 µm. Les longueurs d'onde des radiations absorbées étant supérieures à 1,0 µm, ces radiations **n'appartiennent pas au domaine du visible**. *(remarque : elles appartiennent au domaine infrarouge)*

3. $E_1 - E_0 = h.\nu$ avec $E_0 = 0$ eV (niveau fondamental)

Et $c = \lambda.\nu$ donc : $E_1 = \frac{h.c}{\lambda}$

(0,25) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda = \frac{h.c}{E_1}}$

en exprimant l'énergie E_1 en joule il vient :

(0,25) $\lambda = \frac{6{,}626.10^{-34} \times 3{,}00.10^8}{0{,}20 \times 1{,}6.10^{-19}} = 6{,}2.10^{-6}$ m = **6,2 µm** , on vérifie bien que $\lambda > 1{,}0$ µm.