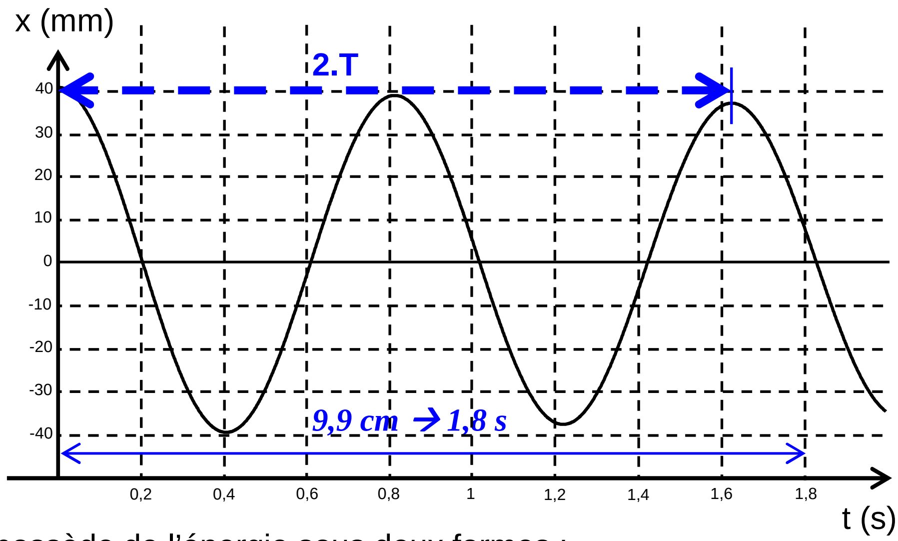
Liban 2009 **Exercice III : L'oscillateur élastique horizontal (4 points)**
Correction © http://labolycee.org

1. Analyse des graphes

1.1.

Courbe 1



8,9 cm → 2T
9,9 cm → 1,8 s

$T = \dfrac{8,9\times 1,8}{9,9\times 2}$

T = 0,81 s

1.2. Le système {mobile + ressort} possède de l'énergie sous deux formes :

- énergie cinétique : $E_C = ½ .m.v^2$
- énergie potentielle élastique : $E_{Pe} = ½ .k.x^2$

Or à t = 0 s, $v(0)= v_0 = 0\ m.s^{-1}$ donc $E_C(0) = 0$ J et $x(0) = x_0 = 4,0$ cm donc $E_{pe} \neq 0$ J.
Sur la courbe 2, l'énergie à t = 0 est non nulle, il s'agit de l'énergie potentielle élastique.

2. Constante de raideur du ressort et masse du mobile

2.1. La courbe 1 montre que x(0) = 40 mm, et la courbe 2 montre que $E_{Pe}(0) = 2,4$ mJ.
$E_{Pe}(0) = ½ .k.x(0)^2$

$k = \dfrac{2E_{Pe}}{x(0)^2}$

$k = \dfrac{2\times 2,4\times 10^{-3}}{\left(40\times 10^{-3}\right)^2}$ = 3,0 $N.m^{-1}$ comme proposé.

2.2. $T_0 = 2.\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$T_0^2 = 4.\pi^2.\dfrac{m}{k}$

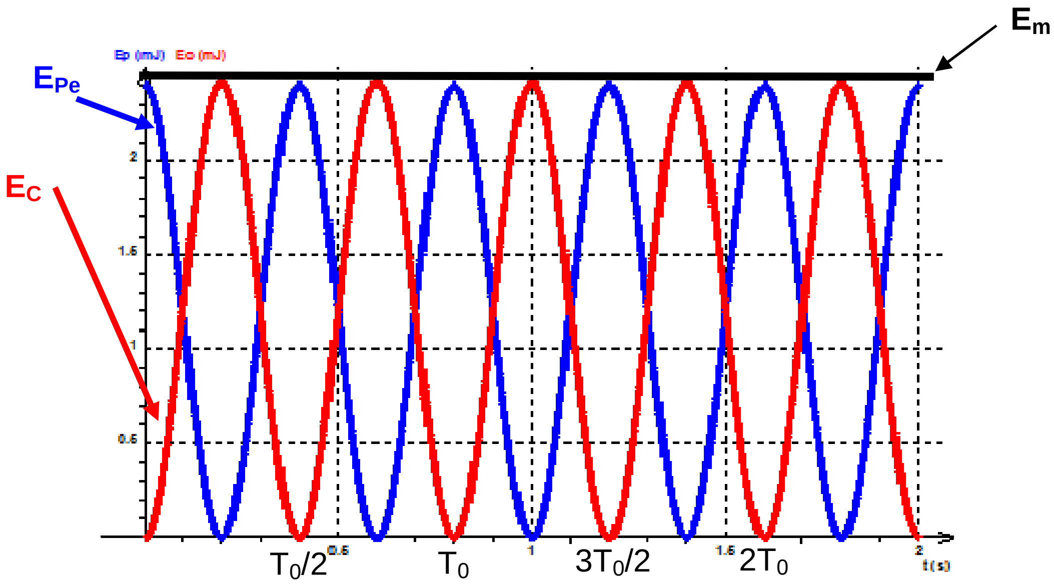
$m = \dfrac{k.T_0^2}{4.\pi^2}$

En considérant $T_0 = T$, on a $m = \dfrac{3,0\times 0,81^2}{4\times\pi^2}$ = $5,0\times 10^{-2}$ kg = **50 g**

3. Évolution des oscillations

3.1. La courbe 1 montre que l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps, cela indique que les forces de frottements ne sont pas négligeables.

3.2. Conditions initiales : $E_C(0) = 0$ mJ, $E_{Pe}(0) = 2,4$ mJ
L'énergie mécanique est définie par $E_m = E_C + E_{Pe}$.
Quand E_C est maximale alors E_{Pe} est minimale.
La fonction $E_C(t)$ a pour période $T_{Ec} = T_0/2$, et la fonction $E_{Pe}(t)$ a pour période $T_{Epe} = T_0/2$.
Voir courbe ci-après :



4.1. Dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen), les forces exercées sur le système sont : **le poids** $\vec{P}$ **, la force de rappel du ressort** $\vec{F}$ **, la poussée de l'air de la soufflerie** $\vec{R}$ (perpendiculaire à Ox, car les frottements sont négligeables).

Appliquons la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m.\vec{a}$

Projetons sur l'axe Ox : $F_x = m.a_x = m.\dfrac{dv_x(t)}{dt} = m.\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

$$-k.x(t) = m.\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0}$$

4.2. Montrons que $x(t) = x_0 \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x_0 . \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) . \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x_0 . \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 . \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$, on remarque que $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 .x(t) = -\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}.x(t)$

On sait que $T_0 = 2.\pi.\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, ainsi $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\dfrac{4\pi^2}{4\pi^2.\dfrac{m}{k}}.x(t) = -\dfrac{k}{m}.x(t)$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}.x(t)$$

$$\text{soit } \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0$$

On retrouve l'équation différentielle, $x(t) = x_0 . \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$ est bien solution de l'équation différentielle du mouvement.