BAC S Métropole 2011 EXERCICE II : CHUTE VERTICALE D'UN BOULET (5,5 points)
Correction © http://labolycee.org

1. Modélisation par une chute verticale

1.1. Étude des hauteurs de chute

1.1.1. On a : $x(t) = \frac{1}{2}.g.t^2$

$$x_1 = x(\tau) = \frac{1}{2}.g.\tau^2$$

$$x_2 = x(2\tau) = \frac{1}{2}.g.(2\tau)^2 = 4\times\frac{1}{2}.g.\tau^2$$

$$x_3 = x(3\tau) = \frac{1}{2}.g.(3\tau)^2 = 9\times\frac{1}{2}.g.\tau^2$$

1.1.2. $h_1 = x_1 - x_0 = x_1 - 0 = ½.g.\tau^2 = 1\times½.g.\tau^2$
$h_2 = x_2 - x_1 = 4\times½.g.\tau^2 - ½.g.\tau^2 = 3\times½.g.\tau^2 = 3.h_1$
$h_3 = x_3 - x_2 = 9\times½.g.\tau^2 - 4½.g.\tau^2 = 5\times½.g.\tau^2 = 5.h_1$

1.1.3. (Voir ci-dessus). On retrouve bien une suite des hauteurs égale à un nombre impair de fois la distance $½.g.\tau^2$ comme annoncée par Galilée.

1.2. Étude de la durée de chute

1.2.1. Proposition b : « la durée de chute diminue quand la masse du boulet augmente » ⇔ Aristote
Proposition c : « la durée de chute est indépendante de la masse » ⇔ Galilée.
La proposition a ne correspond à la pensée d'aucun philosophe.

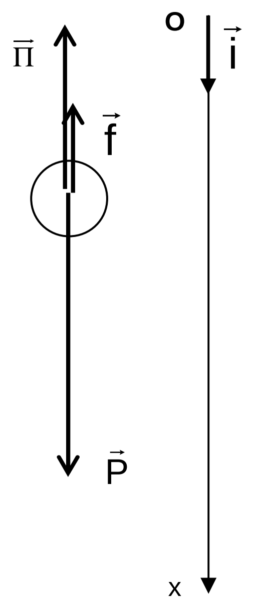
1.2.2. $H = x(t) - x(0) = ½.g.t^2 - ½.g.t_0^2 = ½.g.t^2 - 0 = ½.g.\Delta t^2$ donc $\Delta t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Soit $\Delta t = \sqrt{\frac{2\times 57}{9,8}} = \mathbf{3,4\ s}$

Galilée mesure Δt = 5 s. L'écart est dû aux actions de l'air (frottements et poussée d'Archimède) qui ne sont pas prises en compte et à la technique de mesure de la durée Δt à l'époque de Galilée (pas de chronomètre …).

2. Chute réelle

2.1. Voir schéma ci-contre.



2.2. Poids : $P = m_{boulet\ de\ fer}.g = \rho_{fer}.V_S.g$
Poussée d'Archimède: $\Pi = m_{air\ déplacé}.g = \rho_{air}.V_S.g$

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{fer}.V_S.g}{\rho_{air}.V_S.g} = \frac{\rho_{fer}}{\rho_{air}}$$

soit $\frac{P}{\Pi} = \frac{7,87\times10^3}{1,29} = 6,10\times10^3 >> 1$

Donc P >> Π : la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

2.3.1. La deuxième loi de Newton, appliquée au boulet de fer, dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

En projection selon l'axe (Ox) vertical, orienté vers le bas :

$$P_x + f_x = m.a_x$$

$$m.g - \frac{1}{2}\pi.R^2.\rho_{air}.C.v_x^2 = m.\frac{dv_x}{dt}$$

posons $v = v_x$ alors :

$$m.g - \frac{1}{2}\pi.R^2.\rho_{air}.C.v^2 = m.\frac{dv}{dt}$$

finalement, en divisant par m : $\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{2}\frac{\pi.R^2.\rho_{air}.C.v^2}{m}}$

2.3.2. Lorsque v = v_ℓ = Cte on a : $\frac{dv}{dt} = \frac{dv_\ell}{dt} = 0$

donc $0 = g - \frac{1}{2}\frac{\pi.R^2.\rho_{air}.C.v_\ell^2}{m}$

$\frac{1}{2}\frac{\pi.R^2.\rho_{air}.C.v_\ell^2}{m} = g$

$\pi.R^2.\rho_{air}.C.v_\ell^2 = 2.m.g$

Ainsi $v_\ell^2 = \frac{2.m.g}{\pi.R^2.\rho_{air}.C} = \frac{2.\rho_{fer}.V_S.g}{\pi.R^2.\rho_{air}.C} = \frac{2.\rho_{fer}.\frac{4}{3}.\pi.R^3.g}{\pi.R^2.\rho_{air}.C} = \frac{8.\rho_{fer}.R.g}{3.\rho_{air}.C}$

En ne gardant que la valeur positive : $\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{8.\rho_{fer}.R.g}{3.\rho_{air}.C}}}$

2.3.3. Il suffit de montrer que $\sqrt{R.g}$ s'exprime en $m.s^{-1}$ car C est sans dimension et il apparaît une rapport de masses volumiques.
Analyse dimensionnelle : [R] = L
[g] = $L.T^{-2}$ car g = 9,8 $m.s^{-2}$ d'après l'énoncé
Donc [R.g] = [R].[g] = $L^2.T^{-2}$ donc $\left[\sqrt{R.g}\right] = L.T^{-1}$ ce qui est bien homogène à une vitesse.

2.4. $\frac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}} = \frac{\sqrt{\frac{8.\rho_{fer}.R_2.g}{3.\rho_{air}.C}}}{\sqrt{\frac{8.\rho_{fer}.R_1.g}{3.\rho_{air}.C}}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ comme $R_2 > R_1$ alors $\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} > 1$ ainsi $\frac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}} > 1$ soit $v_{2\ell} > v_{1\ell}$

Le boulet B_2 a la vitesse limite la plus élevée.

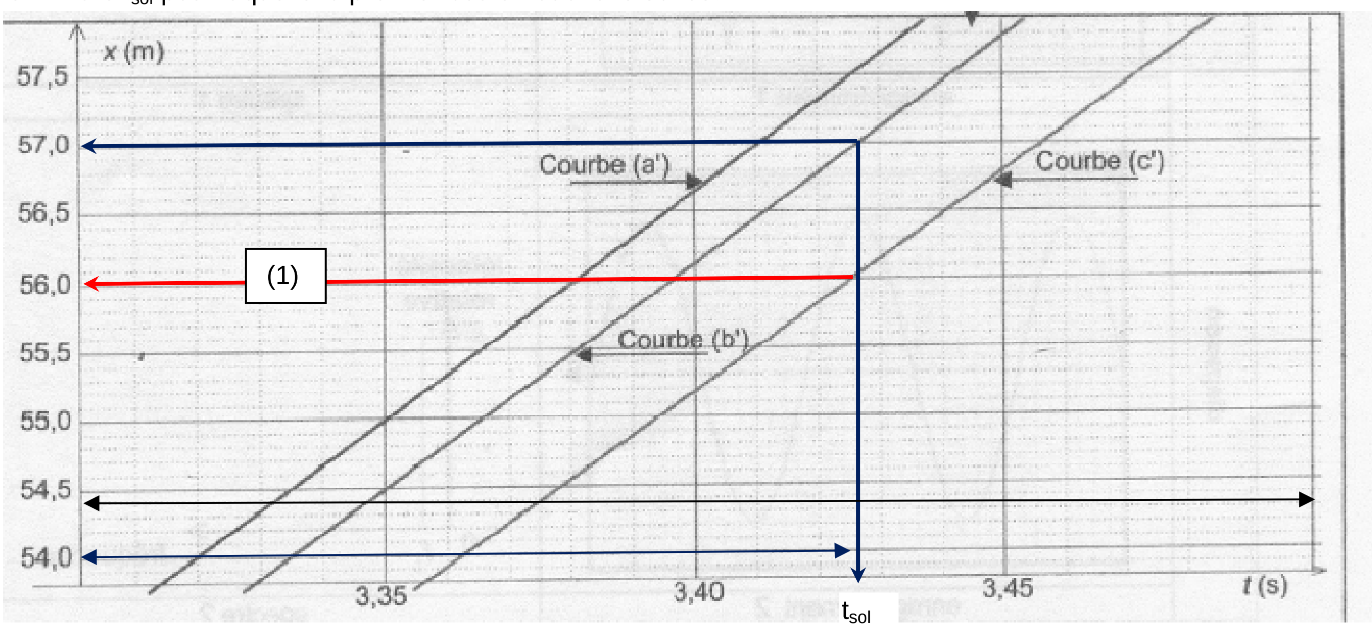
2.5.1. Sur la figure 2, relative aux évolutions des vitesses, on constate pour les courbes (b) et (c) que la vitesse devient constante après un certain temps, alors que pour la courbe (a) la vitesse augmente sans cesse.
La courbe (a) traduit une chute libre, les courbes (b) et (c) des chutes dans l'air correspondant aux deux boulets.

Sur la figure 2, relative aux évolutions des vitesses, on constate qu'en régime permanent la courbe (b) est située au-dessus de la courbe (c). Comme $v_{2\ell} > v_{1\ell}$ alors on peut attribuer :

Courbe (b) ⇔ Boulet B_2

Courbe (c) ⇔ Boulet B_1

2.5.2. Date t_{sol} pour laquelle le premier boulet touche le sol est :



10,2 cm ⇔ t_{sol}
16,3 cm ⇔ 3,500 – 3,300 = 0,200 s
Donc : $\mathbf{t_{sol}}$ = 3,300 + 0,200 × 10,2 / 16,3 = 3,300 + 0,125 = **3,425 s**
Il s'agit du boulet B_2 (courbe b')
2.5.3. D'après la flèche rouge (1), à la même date t_{sol}, le boulet B_1 a chuté de 56,0 m.
Ainsi lorsque B_2 touche le sol, B_1 se trouve à 57,0 – 56,0 = 1,0 m du sol.
Ce résultat n'est pas tout à fait en accord avec l'extrait n°3 où Galilée parle d'un écart de « 2 doigts » bien inférieur à 1,0 m, mais l'écart de un mètre est effectivement inférieur aux 99 coudées d'Aristote.