EXERCICE II - CHUTE VERTICALE D'UN BOULET (5,5 points)
Bac S 2011 Métropole **http://labolycee.org**

Selon la légende, Galilée (1564-1642) aurait étudié la chute des corps en lâchant divers objets du sommet de la tour de Pise (Italie). Il y fait référence dans deux ouvrages : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* et *Discours concernant deux sciences nouvelles* dans lesquels il remet notamment en question les idées d'Aristote.

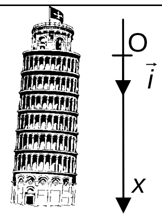

Figure 1. Représentation de la tour penchée de Pise.

Dans cet exercice, on présente trois courts extraits de ces deux livres.
Il s'agit de retrouver certains résultats avancés par Galilée concernant la chute verticale dans l'air d'un boulet sphérique en fer, lâché sans vitesse initiale.
Pour cette étude, on choisit le référentiel terrestre, supposé galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace (Ox) vertical orienté vers le bas (**figure 1**).

Donnée :

- intensité du champ de pesanteur, supposé uniforme : $g = 9{,}8 \text{ m.s}^{-2}$;

1. Modélisation par une chute libre

1.1. Étude des hauteurs de chute

Extrait n°1 :
« Avant tout, il faut considérer que le mouvement des corps lourds n'est pas uniforme : partant du repos, ils accélèrent continuellement (…). Si on définit des temps égaux quelconques, aussi nombreux qu'on veut, et si on suppose que, dans le premier temps, le mobile, partant du repos, a parcouru tel espace, par exemple une aune*, pendant le second temps, il en parcourra trois, puis cinq pendant le troisième (…) et ainsi de suite, selon la suite des nombres impairs ».
* une aune = 1,14 m

Le boulet est lâché au point O, d'abscisse $x_0 = 0$ à la date $t_0 = 0$. On suppose l'action de l'air négligeable ; dans ce cas, l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du boulet est : $x(t) = \frac{1}{2} g.t^2$.

1.1.1. Soient x_1 la distance parcourue au bout de la durée τ, x_2 la distance parcourue au bout de la durée 2τ et ainsi de suite, exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de g et de τ.
1.1.2. Exprimer la différence $h_1 = x_1 - x_0$ en fonction de g et de τ puis les différences $h_2 = x_2 - x_1$ et $h_3 = x_3 - x_2$ en fonction de h_1.
1.1.3. Retrouve-t-on la suite des hauteurs de chute annoncée par Galilée dans l'extrait n°1 ? Justifier.

1.2. Étude de la durée de la chute
Les points de vue d'Aristote et de Galilée, au sujet de l'influence de la masse m du boulet sur la durée totale Δt de sa chute, diffèrent.

Extrait n°2 :
« Cherchons à savoir combien de temps un boulet, de fer par exemple, met pour arriver sur la Terre d'une hauteur de cent coudées*.
Aristote dit qu'une « boule de fer de cent livres**, tombant de cent coudées, touche terre avant qu'une boule d'une livre ait parcouru une seule coudée », et je vous dis, moi, qu'elles arrivent en même temps.
Des expériences répétées montrent qu'un boulet de cent livres met cinq secondes pour descendre de cent coudées ».
* une coudée correspond à une distance de 57 cm ; ** une livre est une unité de masse

1.2.1. Parmi les propositions ci-dessous, attribuer celle qui correspond à la théorie d'Aristote et celle qui correspond à la théorie de Galilée :
a) La durée de chute augmente quand la masse du boulet augmente ;
b) La durée de chute diminue quand la masse du boulet augmente ;
c) La durée de chute est indépendante de la masse.

1.2.2. En utilisant l'expression $x(t) = \frac{1}{2}g.t^2$, calculer la durée Δt de la chute d'un boulet qui tombe d'une hauteur totale $H = 57$ m (100 coudées). Ce résultat est différent de la valeur annoncée dans l'extrait n°2. Proposer une explication à l'écart constaté.

2. Chute réelle

Galilée admet plus loin que les deux boules, de masses respectives une et cent livres, arrivent au sol avec un léger écart.

Extrait n°3 : « Vous constatez, en faisant l'expérience, que la plus grande précède la plus petite de deux doigts, c'est à dire que quand celle-là frappe le sol, celle-ci s'en trouve encore à deux doigts. Or, derrière ces deux doigts, vous ne retrouverez pas les quatre-vingt-dix-neuf coudées d'Aristote. »

On considère que trois forces s'exercent sur un boulet pendant sa chute verticale : son poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottement $\vec{f}$.

La norme de la force de frottement a pour expression : $f = \frac{1}{2}\pi.R^2.\rho_{air}.C.v^2$

où v est la vitesse du centre d'inertie du boulet, R est le rayon du boulet et C est une constante sans unité.

Données :

- masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1{,}29$ kg.m^{-3} ;
- masse volumique du fer : $\rho_{fer} = 7{,}87\times10^3$ kg.m^{-3} ;
- volume d'une sphère : $V_S = \frac{4}{3}\pi.R^3$.

2.1. Lors de la chute, représenter ces trois forces sur un schéma sans souci d'échelle.

2.2. Le poids et la poussée d'Archimède sont constants pendant la chute d'un boulet. Établir le rapport de leurs expressions et en déduire que la poussée d'Archimède est négligeable.

2.3. Étude dynamique

2.3.1. Appliquer la deuxième loi de Newton. Projeter les forces sur l'axe (Ox) vertical orienté vers le bas (**figure 1**). Déterminer l'expression de la dérivée par rapport au temps de la vitesse $\frac{dv}{dt}$.

2.3.2. En déduire que l'expression de la vitesse limite v_ℓ est : $v_\ell = \sqrt{\frac{8\rho_{fer}R.g}{3\rho_{air}.C}}$.

2.3.3. Vérifier, en effectuant une analyse dimensionnelle, que l'expression de v_ℓ est bien homogène à une vitesse.

2.4. On considère deux boulets sphériques B_1 et B_2 en fer de masses respectives $m_1 = 1$ livre et $m_2 = 100$ livres et de rayons respectifs $R_1 = 2{,}2$ cm et $R_2 = 10{,}1$ cm. On note $v_{1\ell}$ et $v_{2\ell}$ les vitesses limites respectives des boulets B_1 et B_2. Exprimer le rapport $\frac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}}$ en fonction des seuls rayons R_1 et R_2 et en déduire le boulet qui a la vitesse limite la plus élevée.

2.5. Un logiciel permet de simuler les évolutions de la vitesse $v(t)$ (**figure 2**) et de la position $x(t)$ du boulet pendant sa chute (**figure 3** et zoom de la figure 3 sur la **figure 4**). Ces courbes sont obtenues pour les trois situations suivantes :

- la chute du boulet B_1 dans l'air (**courbes c et c'**),
- la chute du boulet B_2 dans l'air (**courbes b et b'**),
- la chute libre (**courbes a et a'**).

2.5.1. Expliquer l'attribution des courbes b et c aux boulets B_1 et B_2.

2.5.2. La hauteur de chute est de 57 m. Déterminer graphiquement la date t_{sol} à laquelle le premier boulet touche le sol. S'agit-il de B_1 ou de B_2 ?

2.5.3. À quelle distance du sol se trouve l'autre boulet à cette date ? Ce résultat est-il en accord avec l'extrait n°3 ?

DOCUMENTS DE L'EXERCICE II

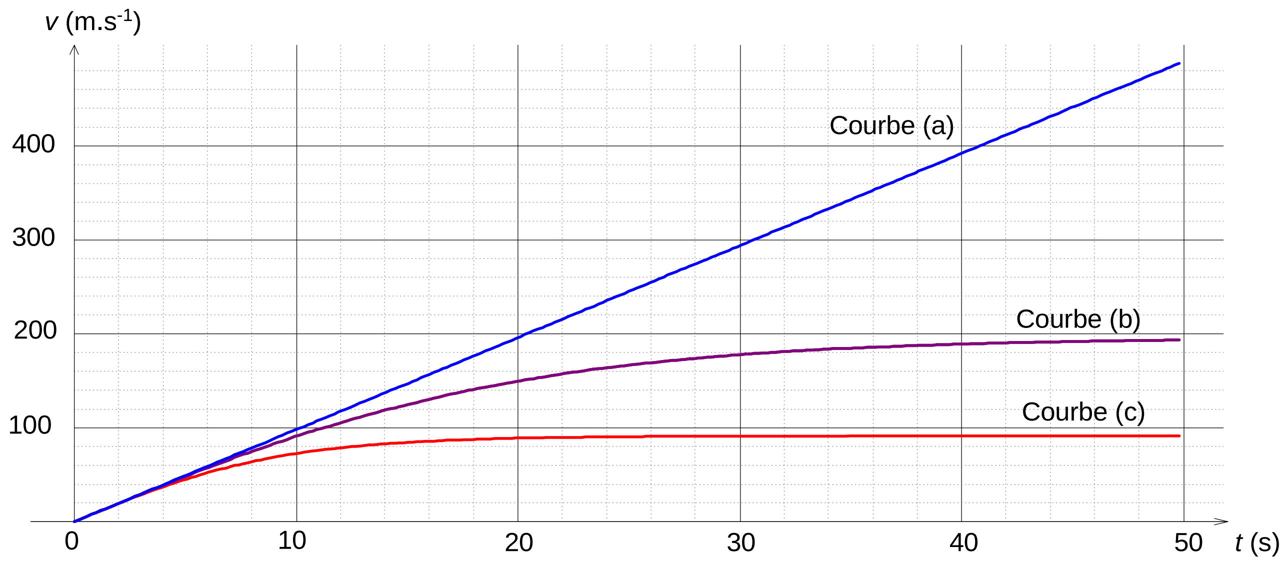

Figure 2. Évolution des vitesses

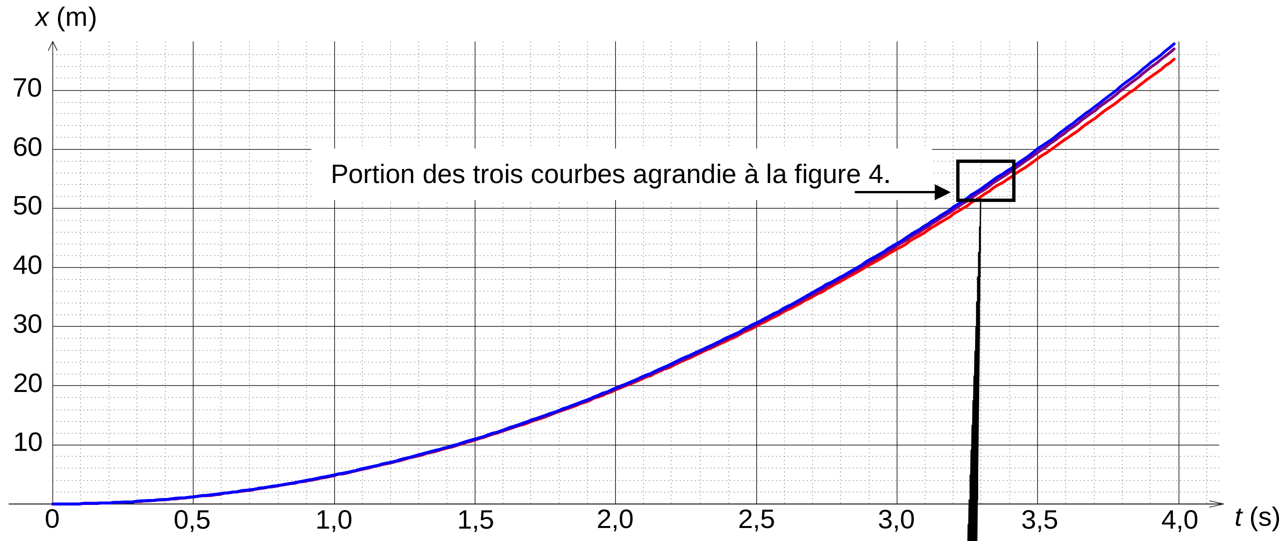

Figure 3. Évolution des positions

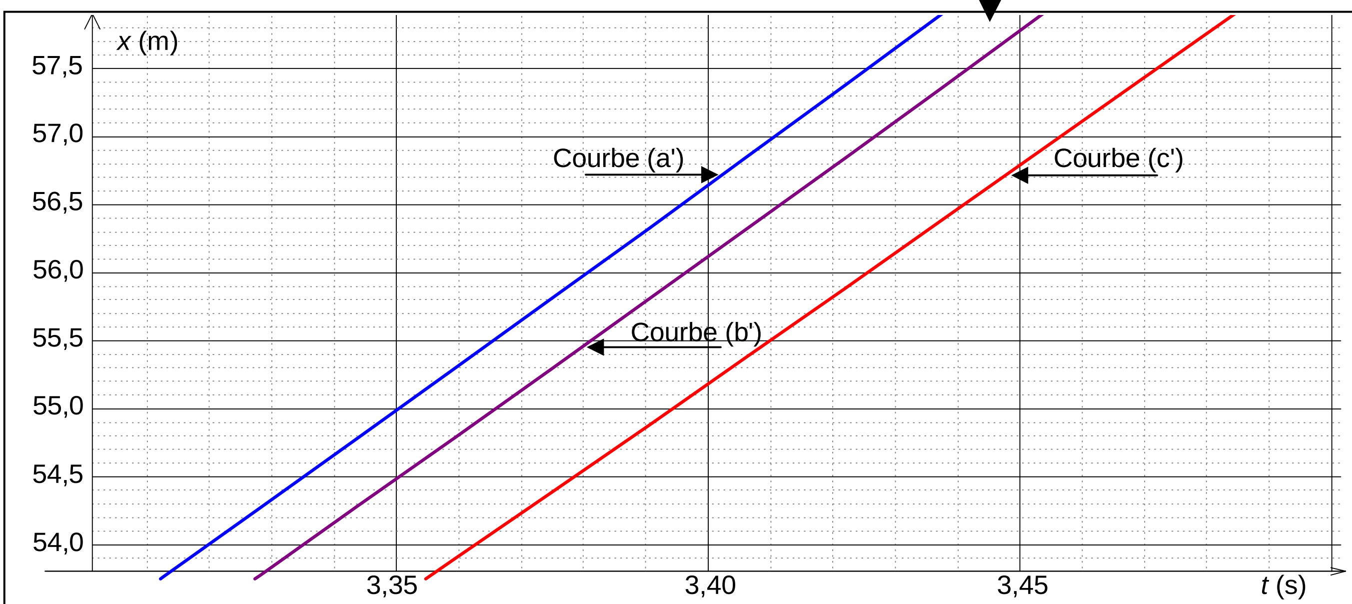

Figure 4. Zoom sur l'évolution des positions