Bac S Pondichéry 2011 EXERCICE 2 : Le saut à l'élastique (5 points)
Correction © http://labolycee.org

1. Première phase du saut à l'élastique. Un peu d'adrénaline…

1.1. *(0,25)* Poussée d'Archimède : $\Pi = m_{air}.g = \rho.V.g$
Π = 1,3 × 0,25 × 9,8 = 3,185 = 3,2 N
Poids du système S : P = m.g
P = 84,0 × 9,8 = 823,2 = $8,2\times10^2$ N
P ≫ Π, il est donc légitime de ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède.

1.2. *(0,25)* On a $f = \mu.v^2$ donc $\mu = \dfrac{f}{v^2}$

Analyse dimensionnelle :
$[f] = [m].[a] = M.L.T^{-2}$ (une force est homogène au produit d'une masse par une accélération)
$[v^2] = L^2.T^{-2}$

$$[\mu] = \frac{[f]}{[v^2]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2T^{-2}} = M.L^{-1}$$ donc l'unité de µ est le **kg.m^{-1}**.

1.3. *(0,25)* La deuxième loi de Newton, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquée au système S, s'écrit : $\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}$

1.4. *(0,25)* En projection sur un axe vertical Ox orienté **vers le bas** :
$$P_x + f_x = m.a_x$$
$$P - f = m.\, a_x$$

1.5. *(0,5)* Or P = m.g et $f = \mu.v^2$ donc $$m.g - \mu.v^2 = m.\frac{dv_x}{dt}$$
$$\frac{dv_x}{dt} = g - \frac{\mu}{m}.v^2$$
$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\mu}{m}.v^2 = g$$

Soit finalement, avec $v^2 = v_x^2$: $$\boxed{\frac{dv_x}{dt} + \frac{\mu}{m}.v_x^2 = g}$$

Par identification avec : $$\frac{dv_x(t)}{dt} + Bv_x^2(t) = A$$
$$\boxed{B = \frac{\mu}{m}} \text{ et } \boxed{A = g}$$

1.6. *(0,5)* A = g donc A s'exprime en **m.s^{-2}**
$B = \dfrac{\mu}{m}$ donc B s'exprime en kg.m^{-1}.kg^{-1} = **m^{-1}**
B = $\dfrac{0,78}{84,0}$ = **9,3.10^{-3} m^{-1}.**

1.7. *(0,75)* Lorsque la vitesse limite v_{lim} est atteinte, $v_x = v_{lim}$ = Cte donc $\dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{dv_{lim}}{dt} = 0$.

L'équation différentielle s'écrit alors : $\dfrac{\mu}{m}.v_{lim}^2 = g$ soit $\boxed{v_{lim} = \sqrt{\dfrac{g.m}{\mu}}}$

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{9,8\times84,0}{0,78}} = \mathbf{32\ m.s^{-1}}$$

1.8.1. ***(0,25)*** Le pas Δt utilisé est $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ = 0,20 s.

1.8.2. ***(0,5)*** $v_x(t_{i+1}) = v_x(t_i) + \left[\frac{dv_x(t)}{dt}\right]_{t=t_i}.\Delta t$, et d'après l'éq. différentielle $\left[\frac{dv_x(t)}{dt}\right]_{t=t_i} = A - B.v_x^2(t_i)$

$v_x(0{,}80) = v_x(0{,}60) + \left[\frac{dv_x(t)}{dt}\right]_{t=0{,}60}.\Delta t$, avec $\left[\frac{dv_x(t)}{dt}\right]_{t=0{,}60} = A - B.v_x^2(0{,}60)$

$v_x(0{,}80) = v_x(0{,}60) + [A - B.v_x^2(0{,}60)].\Delta t$,

$v_x(0{,}80) = 5{,}85 + [9{,}8 - 9{,}3.10^{-3} \times 5{,}85^2] \times 0{,}20$

$v_x(0{,}80) =$ **7,75 m.s^{-1}**

<u>2. Deuxième phase du saut à l'élastique.</u>

2.1. ***(0,75)*** Il s'agit d'oscillations mécaniques libres amorties, car l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps. La pseudo-période T des oscillations est telle que : 4T = 40 s soit T = 10 s.

2.2. ***(0,25)*** Si on assimile l'élastique à un ressort de raideur k relié à une masse m, l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres est : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

2.3. ***(0,5)*** $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{84{,}0}{38{,}0}}$ = 9,34 s.

La période propre T_0 est inférieure à la pseudo-période T, car les frottements exercés sur le système ne sont pas négligeables face aux autres forces.