EXERCICE I - UN PEU DE BALISTIQUE (8 points)

1. Durée de visibilité de la fusée

(0,5 trajectoire)
(0,25 champ)

1.1.

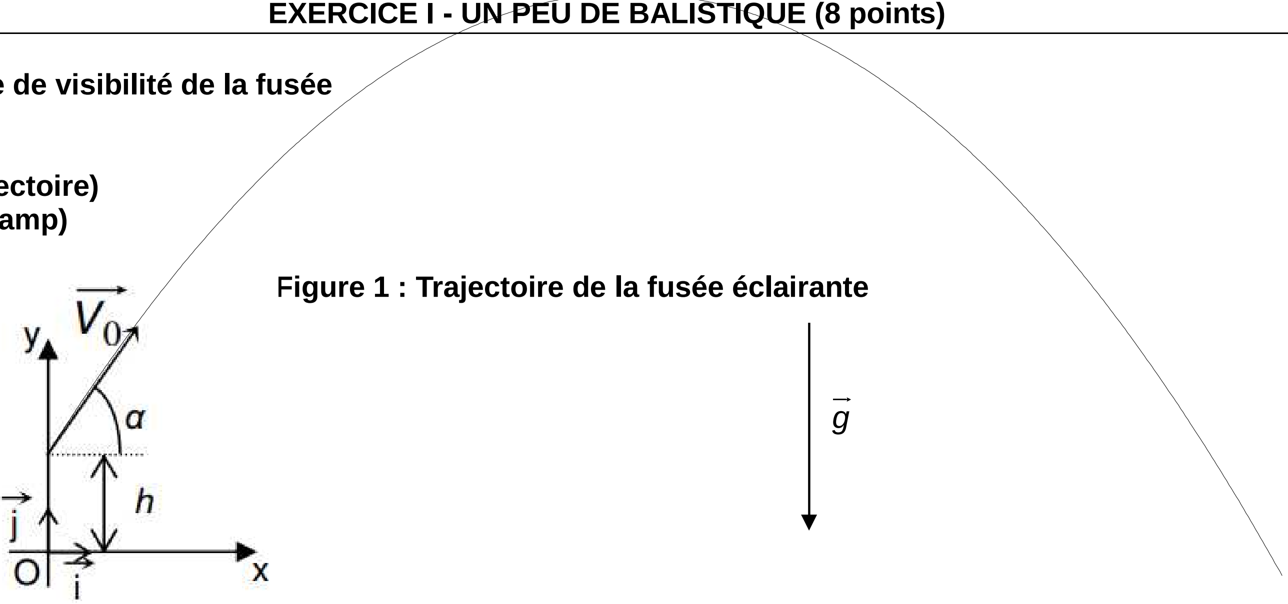

Figure 1 : Trajectoire de la fusée éclairante

1.2. (0,5) Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, on peut appliquer la **deuxième loi de Newton** au système {fusée éclairante} pour déterminer les coordonnées du vecteur accélération.
En effet, cette loi stipule que dans un référentiel galiléen, **la somme des forces extérieures appliquées au système (ici la fusée éclairante) est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement**.

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_f.\vec{v})}{dt} = \frac{dm_f}{dt}.\vec{v} + m_f.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On néglige la variation de masse de la fusée pendant son mouvement donc $\frac{dm_f}{dt} = 0$ et la deuxième loi de Newton devient : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m_f.\frac{d\vec{v}}{dt} = m_f.\vec{a}$.

On néglige toutes les actions dues à l'air (frottement, poussée d'Archimède), alors la fusée est en chute libre, soumise uniquement à la force poids $\vec{P}$.

Ainsi $\vec{P} = m_f.\vec{a}$.

$m_f.\vec{g} = m_f.\vec{a}$

$\vec{g} = \vec{a}$

(0,5) Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on obtient $\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$

1.3. Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on a $\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}$

En primitivant, on obtient $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g.t + C_2 \end{cases}$ où C_1 et C_2 sont des constantes liées aux conditions initiales.

À la date t = 0 s, on $\vec{v} = \overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0.\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0.\sin\alpha \end{cases}$.

(1) On en déduit $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}$

Comme $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}$, on a $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0.\cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}$

En primitivant, on obtient $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha.t + C_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + C_4 \end{cases}$ où C_3 et C_4 sont des constantes liées aux conditions initiales.

À la date t = 0 s, la fusée éclairante est située à la sortie du pistolet à une altitude h donc $\overrightarrow{OG}\begin{cases} 0 \\ h \end{cases}$.

(1) On en déduit $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha.t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + h \end{cases}$ conformément aux équations horaires proposées.

1.4. (1) Pour déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante, on cherche la date t_{Vol} pour laquelle la fusée touche le sol, ainsi $y(t_{vol}) = 0$.

Il faut résoudre l'équation du second degré : $-\dfrac{1}{2}.g.t_{vol}{}^2 + v_0.\sin\alpha.t_{vol} + h = 0$ et ne retenir que la solution positive.

$t_{vol} = \dfrac{-v_0.\sin\alpha - \sqrt{(v_0.\sin\alpha)^2 - 4\times\left(-\dfrac{g}{2}\right).h}}{-g} = \dfrac{-v_0.\sin\alpha - \sqrt{(v_0.\sin\alpha)^2 + 2.g.h}}{-g}$

$t_{vol} = \dfrac{-50\times\sin 55 - \sqrt{(50\times\sin 55)^2 + 2\times 9{,}8\times 1{,}8}}{-9{,}8}$ = **8,4 s**

<u>Méthode moins rigoureuse :</u> résolution numérique

$-\dfrac{1}{2}.g.t_{vol}{}^2 + v_0.\sin\alpha.t_{vol} + h = 0$

$-0{,}5\times 9{,}8.t_{vol}{}^2 + 50\times(\sin 55).t_{vol} + 1{,}8 = 0$

$-4{,}9.t_{vol}{}^2 + 40{,}96.t_{vol} + 1{,}8 = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = (50\times\sin 55)^2 - 4\times(-4{,}9)\times 1{,}8 = 1712{,}81$

$t_{vol} = \dfrac{-50\times\sin 55 - \sqrt{1712{,}81}}{-2\times 4{,}9}$ = 8,4 s

1.5. (1) On a $y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + h$.

On sait que la fusée commence à éclairer au bout d'une seconde.
Pour connaître l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer, calculons y(t = 1 s).

$y(t = 1\,s) = -\dfrac{1}{2}.g + v_0.\sin\alpha + h = -\dfrac{1}{2}\times 9{,}8 + 50\times\sin 55 + 1{,}8$ = 38 m = **4×10¹ m** avec 1 seul chiffre significatif.

On cherche l'altitude à laquelle la fusée cesse d'éclairer.
La fusée éclaire ensuite de façon intense pendant 6 secondes, elle atteint alors l'altitude y(t = 6 + 1).

$y(t = 7\ s) = -\dfrac{1}{2}\times 9{,}8\times 7^2 + 50\times\sin 55\times 7 + 1{,}8$ = 48 m = **5×10¹ m** avec un seul chiffre significatif.

On a trouvé que la fusée éclairait entre 38 et 48 m d'altitude. La fusée étant très haute elle éclaire une large zone, ce qui semble adapté au but recherché.

2. Pour aller un peu plus loin

2.1. (0,5) $\overrightarrow{p_0} = (m_p + m_f).\vec{v}$

(0,25) Avant que la fusée ne quitte le pistolet, on a $\vec{v} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{p_0} = \vec{0}$.

2.2. Éjection de la fusée

2.2.1. (0,5) La quantité de mouvement d'un système isolé se conserve : $\vec{p} = \overrightarrow{Cte}$.

2.2.2. (0,5) Juste après l'éjection de la fusée, la quantité de mouvement du système a pour expression : $\vec{p} = m_p.\overrightarrow{v_p} + m_f.\overrightarrow{v_0}$

Comme $\vec{p} = \overrightarrow{Cte}$ alors $\vec{0} = m_p.\overrightarrow{v_p} + m_f.\overrightarrow{v_0}$

$$\overrightarrow{v_p} = -\frac{m_f}{m_p}.\overrightarrow{v_0}$$

2.2.3. (0,5) Le soldat tient fermement le pistolet lors du tir, ainsi il exerce une force sur le système ce qui réduit la vitesse de recul du pistolet. D'autre part, le système subit des forces de frottement non prises en compte.