Bac S 2015 Amérique du Nord EXERCICE I. SUPER HÉROS EN DANGER … (6 points)
Correction © http://labolycee.org

1. Mouvement ascensionnel de Rocketeer

1.1. Pour la phase 1 : par définition $\overrightarrow{a_G} = \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, soit ici $\overrightarrow{a_G} \approx \frac{\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_0}}{\Delta t} \approx \frac{\overrightarrow{v_1}}{\Delta t}$.

Ainsi le vecteur accélération a même sens et même direction que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_1}$.

Le mouvement est vertical, la direction de $\overrightarrow{a_G}$ est verticale.

Le mouvement est ascensionnel, $\overrightarrow{a_G}$ est orienté vers le haut.

Pour la phase 2 :

$\overrightarrow{a_G} = \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ avec $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ ainsi $\overrightarrow{a_G} = \vec{0}$.

1.2.1. L'autre force qui s'exerce sur le système M est son poids $\vec{P}$.

1.2.2. Pour que le système décolle, il faut que la valeur de la force de poussée $\vec{F}$ (orientée vers le haut) soit supérieure à celle du poids $\vec{P}$ (orientée vers le bas).

$F > P$
$F > m_R \cdot g$
$F > 120 \times 10$
$F > 1200$ N résultat conforme à la proposition C qui, seule, indique une valeur supérieure à 1200 N.

Remarque : il est possible de faire une réponse plus rigoureuse en appliquant la 2ème loi de Newton au système M et en utilisant la condition $a_y > 0$ ce qui implique $P_y + F_y > 0$

soit $- P + F > 0$ donc $F > P$

< 0 orienté vers le bas *>0 orienté vers le haut*

1.2.3. D'après l'énoncé, la valeur de la force de poussée est « égale au produit du débit massique de gaz éjecté par la vitesse d'éjection de ces gaz » donc $F = D_f . v_f = \frac{m_f}{\Delta t_1} . v_f$.

Ainsi, $m_f = \frac{F.\Delta t_1}{v_f}$

$m_f = \frac{1600 \times 3,0}{2 \times 10^3} = 2,4$ kg comme indiqué (1 seul CS en toute rigueur).

1.2.4. En appliquant la seconde loi de Newton au système M, dans un référentiel terrestre considéré galiléen :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_R.\vec{v})}{dt} = \frac{dm_R}{dt}.\vec{v} + m_R.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Comme la masse du système est considérée constante malgré l'éjection des gaz, alors $\frac{dm_R}{dt} = 0$, on obtient $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m.\overrightarrow{a_G}$.

$\vec{P} + \vec{F} = m_R.\overrightarrow{a_G}$

En projetant sur un axe Oy vertical : $P_y + F_y = m_R \cdot a_{Gy}$

En orientant l'axe vers le haut :$- P + F = m_R \cdot a_{Gy}$

$$a_{Gy} = \frac{-P + F}{m_R} = \frac{-m_R.g + F}{m_R} = -g + \frac{F}{m_R}$$

$a_{Gy} = -10 + \frac{1600}{120}$ = **3,3 m.s^{-2}** *valeur non arrondie stockée en mémoire*

Estimons la valeur v_1 de la vitesse à l'issue de la phase 1, soit à la date t_1 = 3,0 s :

Par définition $a_{Gy} = \frac{dv_y}{dt}$ donc en primitivant, on obtient $v_y = a_{Gy}.t + C$.

D'après les conditions initiales, à t = 0 s, on a v_y = 0 donc C = 0.

Ainsi $\boldsymbol{v_y = a_{Gy}.t}$

$v_y(t = 3{,}0\text{ s}) = 3{,}3 \times 3{,}0 = 10\ \text{m.s}^{-1}$

$v_1 = \sqrt{v_x(t_1)^2 + v_y(t_1)^2}$

$\mathbf{v_1 = 10\ m.s^{-1}}$

2. Problème technique

2.1. D'après l'énoncé, la vitesse du système à la date t = 0 est nulle : on peut donc éliminer les courbes C et D.

De plus, le système tombe verticalement donc le vecteur vitesse est orienté vers le bas et avec l'orientation de l'axe Oy choisie $V_y < 0$.

Seule la courbe A est cohérente avec la situation présentée.

2.2. Considérons le système M dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) en chute libre. Il n'est soumis qu'à son poids.

Appliquons la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m.\vec{a}$

soit $m.\vec{g} = m.\vec{a}$

donc $\vec{g} = \vec{a}$

Par projection sur l'axe Oy vertical orienté vers le haut, il vient $\mathbf{a_y = -g}$

Par définition, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$.

En primitivant, on obtient $v_y = -g.t + v_{0y}$.

Le système tombe sans vitesse initiale, soit $v_{0y} = 0\ \text{m.s}^{-1}$ donc : $\boldsymbol{v_y = -g.t}$

D'autre part $v_y = \frac{dy}{dt}$.

En primitivant, on a : $y = -\frac{1}{2}\,g.t^2 + C$.

Or à t = 0 s, le système est à la hauteur y_0 = 80 m, donc C = y_0 d'où : $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}\,g.t^2 + y_0}$

Numériquement : $y = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 80$

Soit, comme indiqué, $\boldsymbol{y = -5.t^2 + 80}$

2.3. Il faut que Batman arrive sur le lieu de décollage avant que Rocketeer ne touche le sol.

D'après l'équation précédente, la durée de chute t_C est telle que $y(t_C) = -5.t_C^2 + 80 = 0$.

Donc $t_C = \sqrt{\frac{-80}{-5}}$ = 4,0 s.

Il faut déterminer la distance que Batman doit parcourir en utilisant le schéma.

L'échelle donne 1 cm → 1 km

9,4 cm → d

d = 9,4 km à parcourir en t_C = 4,0 s, à la vitesse moyenne v.

$v = \frac{d}{t_C}$

$v = \frac{9{,}4\times10^3}{4{,}0} = 2{,}4\times10^3\ \text{m.s}^{-1} = 2{,}4\ \text{km.s}^{-1}$

Pour que Rocketeer soit sauvé, il faut que la Batmobile roule à une vitesse impressionnante, proche de 7 fois la vitesse du son (Mach 7). Il semble impossible que Batman ait le temps d'intervenir. Les aventures de Rocketeer risquent de s'arrêter lors de cet épisode.