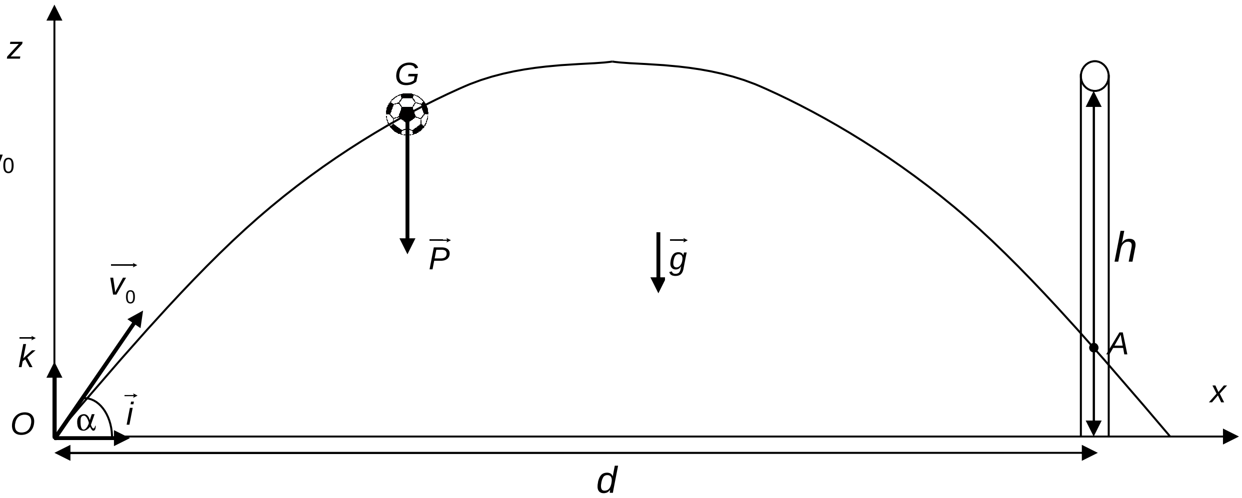
EXERCICE I : LES TIRS AU BUT (6 points)

1. Schématisation du problème

1.1.

0,25 h
0,25 d
0,25 α, v0



1.2. (0,25) Si A est le point où se situe le ballon lorsqu'il franchit la ligne de but, alors le pénalty est réussi si pour $x_A = d$ alors $0 < z_A < h$.

2. Étude dynamique du mouvement du ballon

2.1. Système {ballon} de masse m constante et de centre d'inertie G

Référentiel terrestre supposé galiléen

Repère (Ox ; Oz)

Forces : poids du ballon, $\vec{P} = m\vec{g}$

les forces de frottement de l'air ainsi que la poussée d'Archimède sont négligés

(0,25) Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m.\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

(0,25) soit $\vec{P} = m.\overrightarrow{a_G}$ soit $m.\vec{g} = m.\overrightarrow{a_G}$ d'où $\boxed{\overrightarrow{a_G} = \vec{g}}$

2.2. (0,25) En projection dans le repère (Ox ; Oz) : $\boxed{\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x(t) = g_x = 0 \\ a_z(t) = g_z = -g \end{pmatrix}}$

Or $\overrightarrow{a_G} = \dfrac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$ donc $\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_z = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = -g \end{pmatrix}$ en primitivant $\overrightarrow{v_G}\begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_z(t) = -g.t + C_2 \end{pmatrix}$

À t = 0, $\overrightarrow{v_G}(t=0) = \overrightarrow{v_0}$ avec $\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix} v_0.\cos\alpha \\ v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$

Donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs, il vient $\begin{pmatrix} C_1 = v_0.\cos\alpha \\ 0 + C_2 = v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$

(0,5) Finalement : $\boxed{\overrightarrow{v_G}\begin{pmatrix} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_z(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}}$

Et $\overrightarrow{v_G} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $\overrightarrow{v_G}\begin{pmatrix} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0.\cos\alpha \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{pmatrix}$

(0,25) en primitivant $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.t + C'_1 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + C'_2 \end{pmatrix}$

À t = 0, $\overrightarrow{OG}(t=0)=\vec{0}$ donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs $\begin{pmatrix} C'_1 = 0 \\ C'_2 = 0 \end{pmatrix}$

(0,25) Finalement les équations horaires *x(t)* et *z(t)* sont : $\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = v_0.\cos\alpha.t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t \end{pmatrix}}$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire *z*(*x*) du ballon, on isole le temps *t* de *x*(*t*) et on reporte l'expression de *t* dans *z*(*t*) :

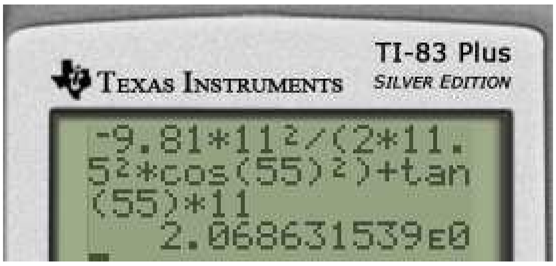
$x = v_0.\cos\alpha.t$ donc $t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$ et $z(x) = -\dfrac{1}{2}g.\left(\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + v_0.\sin\alpha.\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

(0,25) Finalement : $\boxed{z(x) = -\dfrac{g.x^2}{2.v_0^2.(\cos\alpha)^2} + \tan\alpha.x}$

2.3. (0,25) Le pénalty est réussi si pour x_A = 11,0 m on a $0 < z_A < 2{,}44$ m.

$$z_A = -\frac{g.x_A^2}{2.v_0^2.(\cos\alpha)^2} + \tan\alpha.x_A$$

$$z_A = -\frac{9{,}81\times(11{,}0)^2}{2\times(11{,}5)^2\times(\cos 55)^2} + \tan 55\times 11{,}0 = \mathbf{2{,}1\ m}$$



(0,25)
Comme z_A vérifie les inégalités $0 < z_A < 2{,}44$ m, le pénalty est réussi.

3. Étude énergétique du mouvement du ballon
3.1. (0,5 expressions + 0,5 raisonnement)

Énergie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2}.m.v^2$

Énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = m.g.z$

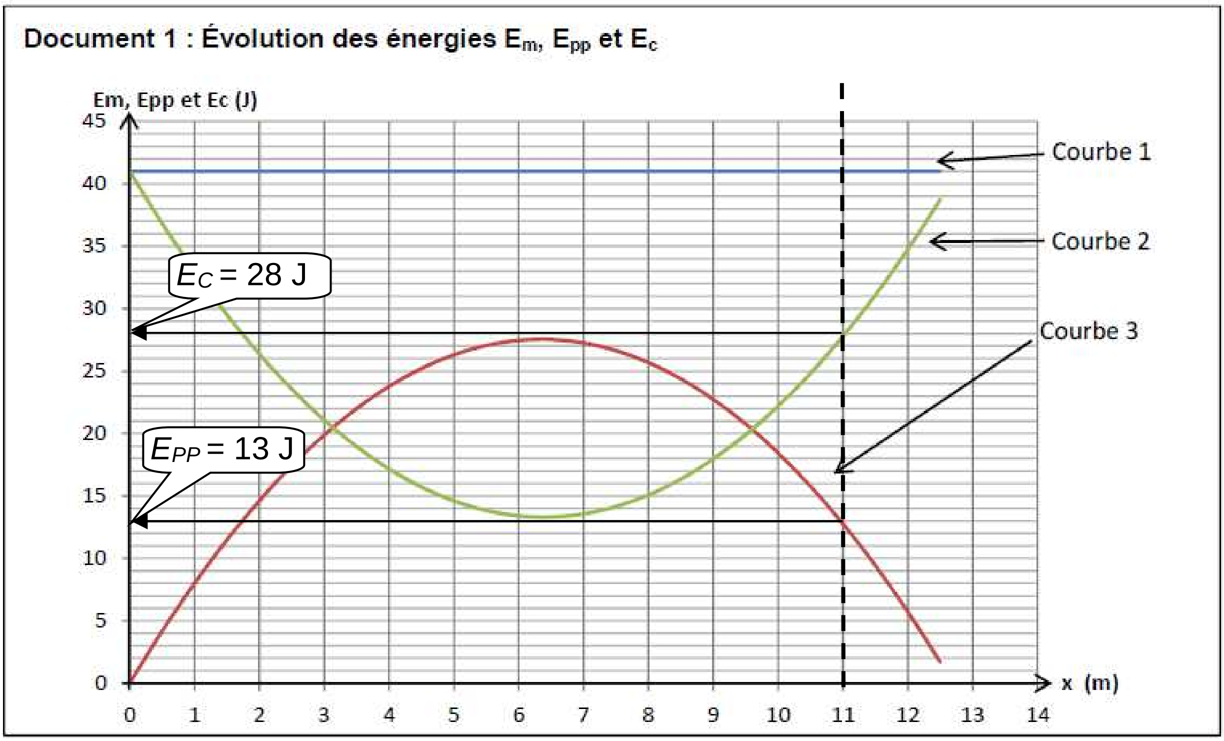
Énergie mécanique : $E_m = E_c + E_{pp} = \dfrac{1}{2}.m.v^2 + m.g.z$

À *t* = 0, le ballon est à l'origine du repère donc *x* = 0 et *z* = 0.
À cette date, l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP} = m.g.z$ est nulle. Seule la courbe 3 passe par l'origine du repère du graphe des énergies. Ainsi **la courbe 3 est** associée à **l'énergie potentielle de pesanteur**.

Les frottements étant négligés, l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. On associe donc **la courbe 1** à **l'énergie mécanique**.

La **courbe 2** est donc associée à **l'énergie cinétique**. La vitesse diminue lors de la montée en altitude de la balle, puis augmente au cours de la descente.

3.2. (0,25 + 0,25) Lorsque le ballon franchit la ligne de but, x_A = 11,0 m ; graphiquement on lit : E_C = 28 J et E_{PP} = 13 J.



Or $E_C = \frac{1}{2}.m.v_A{}^2$ donc $v_A^2 = \frac{2E_C}{m}$ soit $v_A = \sqrt{\frac{2E_C}{m}}$ en ne conservant que la solution positive.

(0,25) $v_A = \sqrt{\frac{2\times 28}{0{,}620}}$ = **9,5 m.s⁻¹**.

Et $E_{PP} = m.g.z_A = m.g.h_A$ donc $h_A = \frac{E_{PP}}{m.g}$

(0,25) soit $h_A = \frac{13}{0{,}620\times 9{,}81}$ = **2,1 m.**

Remarque : on retrouve la valeur de z_A de la question 2.3.

3.3. L'énergie mécanique du ballon se conserve au cours du mouvement.
(0,25) Ainsi, entre le point *O* et le point *A* on a : $E_m(O) = E_m(A)$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{2}.m.v_0^2 + m.g.z_O = \frac{1}{2}.m.v_A^2 + m.g.z_A$$

Or z_O = 0 m et $z_A = h_A$ donc : $\frac{1}{2}.\cancel{m}.v_0^2 + 0 = \frac{1}{2}.\cancel{m}.v_A^2 + \cancel{m}.g.h_A$

(0,25) En multipliant tous les termes par 2 et en les divisant par *m*, on obtient :

$v_0^2 = v_A^2 + 2.g.h_A$

d'où : $v_A^2 = v_0^2 - 2.g.h_A$

Finalement, en ne conservant que la solution positive : $\boxed{v_A = \sqrt{v_0^2 - 2.g.h_A}}$

(0,25) $v_A = \sqrt{(11{,}5)^2 - 2\times 9{,}81\times 2{,}1}$ = **9,5 m.s⁻¹.**

On retrouve bien la valeur v_A de la vitesse du ballon lorsqu'il franchit la ligne de but.
La conservation de l'énergie mécanique utilisée ici est confirmée.