EXERCICE II : DÉTECTION ET HABITABILITÉ D'UNE EXOPLANÈTE (5 points)

1. Illustration du principe de détection par vélocimétrie

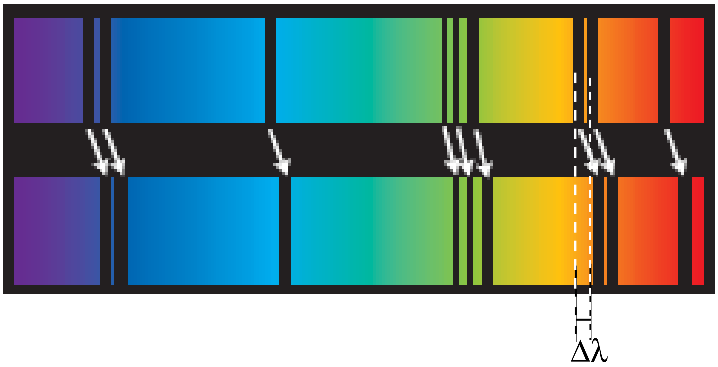
1.1. La vitesse de déplacement v du système {étoile-planète} par rapport à la Terre est donnée par la relation : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ soit, avec $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{mesurée}$, on obtient $v = c \cdot \frac{\lambda - \lambda_{mesurée}}{\lambda}$

Or c et λ = 658,2 nm sont des constantes donc v dépend du décalage spectral $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{mesurée}$.

Pour tracer le graphe du doc.2, les chercheurs ont suivi la démarche suivante :

- ils ont enregistré le spectre de raies de l'étoile au cours de plusieurs nuits ;
- ils ont mesuré le décalage spectral $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{mesurée}$ entre la longueur d'onde mesurée $\lambda_{mesurée}$ et la longueur d'onde de référence λ = 658,2 nm ;
- ils en ont déduit la vitesse v du système {étoile-planète}.

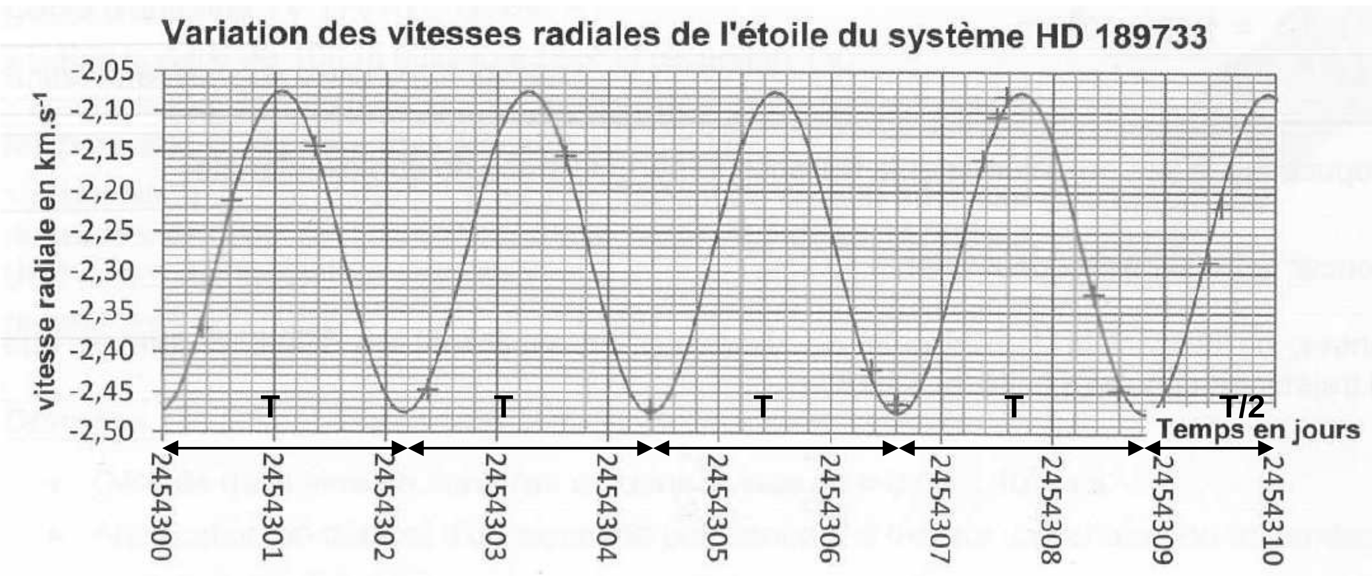
Complément :



Spectre de raies de référence

Spectre de raies observé

1.2.



Soit T la période de révolution de l'étoile autour du centre de gravité G du système.

En 2454310 – 2454300 = 10 jours on mesure 4,5.T soit :

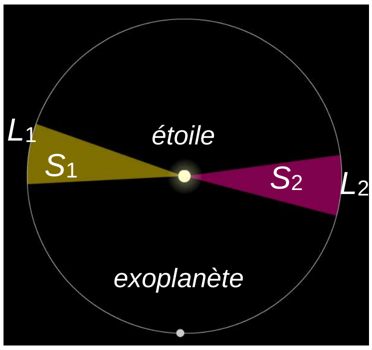
$4{,}5T = 10 \Leftrightarrow T = \frac{10}{4{,}5}$ = 2,22 jours soit **T =** $2{,}22 \times 24 \times 3600$ s = $\mathbf{1{,}9 \times 10^5}$ **s**.

(Valeur exacte stockée en mémoire)

L'exoplanète possède la même période de révolution que l'étoile comme l'indique le document 1.

1.3. Le graphe du doc.2 étant **une sinusoïde**, la trajectoire de la planète autour du centre de gravité G est **un cercle**.

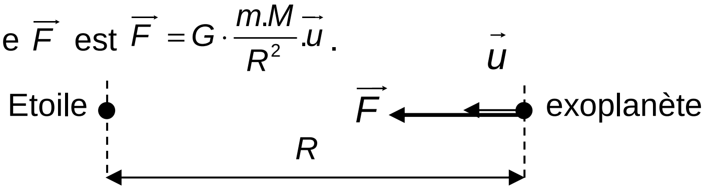
1.4. On suppose que le centre de gravité du système est confondu avec le centre de l'étoile. La trajectoire de l'exoplanète est un cercle.
Utilisons la deuxième loi de Kepler : « Le rayon vecteur étoile-exoplanète, orienté de l'étoile vers l'exoplanète, balaye des **surfaces égales** pendant des **intervalles de temps égaux** ».
Ainsi, pendant la même durée Δt, les longueurs L_1 et L_2 parcourues par l'exoplanète sont égales. Par conséquent, les vitesses $v_1 = \frac{L_1}{\Delta t}$ et $v_2 = \frac{L_2}{\Delta t}$ sont égales.
Le mouvement de l'exoplanète est donc **uniforme**.



2. Habitabilité de l'exoplanète du système HD 189733

2.1. Troisième loi de Kepler : Le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique, soit : $\frac{T^2}{a^3} = Cte$.

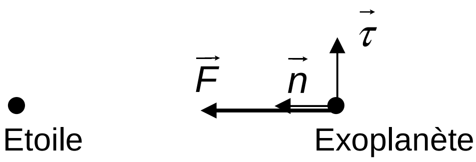
2.2. La 2ème loi de Newton appliquée au système {exoplanète}, dans le référentiel de l'étoile supposé galiléen indique $\Sigma\overrightarrow{F_{Ext.}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. En considérant que l'exoplanète n'est soumise qu'à la force $\vec{F}$ d'attraction gravitationnelle de l'étoile, on a $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. La masse m de l'exoplanète étant constante, on a : $\vec{F} = \frac{d\left(m.\vec{v}\right)}{dt} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m.\vec{a}$.
En considérant que la trajectoire est circulaire et de rayon R alors l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}$ est $\vec{F} = G\cdot\frac{m.M}{R^2}.\vec{u}$.



Ainsi : $G.\frac{m.M}{R^2}.\vec{u} = m.\vec{a}$

L'accélération de l'étoile est donc : $\boxed{G.\frac{M}{R^2}.\vec{u} = \vec{a}}$.

Dans le repère de Frenet $\left(\text{Exoplanète}, \vec{n}, \vec{\tau}\right)$,



le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = \frac{v^2}{R}.\vec{n} + \frac{dv}{dt}.\vec{\tau}$.

avec $\vec{n} = \vec{u}$ on obtient : $\vec{a} = \frac{v^2}{R}.\vec{u} + \frac{dv}{dt}.\vec{\tau}$.

En égalant les deux expressions de l'accélération, il vient : $\frac{G.M}{R^2}.\vec{u} = \frac{v^2}{R}.\vec{u} + \frac{dv}{dt}.\vec{\tau}$

Par identification on obtient : $\begin{cases} sur\ \vec{u} : \frac{G\cdot M}{R^2} = \frac{v^2}{R} \\ sur\ \vec{\tau} : 0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = cte \end{cases}$

*<u>Remarque 1</u> : La deuxième équation montre que la valeur de la vitesse de l'exoplanète est constante donc le mouvement est uniforme. Cette méthode aurait pu être utilisée à la question **1.4.***

<u>Remarque 2</u> : on peut se passer de l'utilisation du repère de Frenet. En effet, on a montré que le mouvement était circulaire et uniforme dans la partie 1. Dans ce cas, l'accélération de l'exoplanète est radiale et s'écrit : $\vec{a} = \frac{v^2}{R}.\vec{u}$. On retrouve alors directement la première équation de l'accolade en égalant les deux expressions de l'accélération.

On a : $\frac{G.M}{R^2} = \frac{v^2}{R}$ donc on en déduit que $v = \sqrt{\frac{G.M}{R}}$.

Pendant une période T, l'exoplanète parcourt son orbite de longueur $2\pi R$ à la vitesse v autour de l'étoile donc : $T = \frac{2\pi.R}{v}$.

Ainsi : $T^2 = \frac{4\pi^2.R^2}{v^2}$

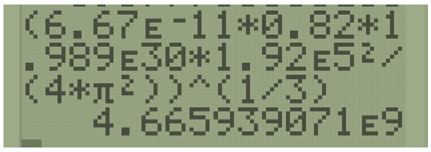
Or : $v^2 = \frac{G.M}{R}$, on en déduit que : $T^2 = \frac{4\pi^2.R^2}{\frac{G.M}{R}} = \frac{4\pi^2.R^3}{G.M}$

Finalement on obtient : $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}}$

2.3. On a : $R^3 = \frac{G.MT^2}{4\pi^2}$ soit finalement $\boxed{R = \left(\frac{G.M.T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$

avec $M = 0{,}82\times M_0$ et $M_0 = 1{,}989\times10^{30}$ kg.

$$R = \left(\frac{6{,}67\times10^{-11}\times0{,}82\times1{,}989\times10^{30}\times(1{,}92\times10^{5})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$



$\boldsymbol{R}$ **= 4,7×10⁹ m** *valeur non arrondie stockée en mémoire*

2.4. Sachant que 1 U.A = $1{,}50\times10^{8}$ km = $1{,}50\times10^{11}$ m, on a :

$$\boldsymbol{R} = \frac{4{,}6659\times10^{9}}{1{,}50\times10^{11}} = \mathbf{3{,}11\times10^{-2}\ U.A.}$$

L'étoile ayant des caractéristiques similaires à celle du Soleil (doc.2), on peut penser que sa zone d'habitabilité est voisine de celle du Soleil : elle serait donc comprise entre 0,726 U.A. et 1,52 U.A. Comme R n'appartient pas à cet intervalle, l'exoplanète n'est pas dans la zone d'habitabilité de l'étoile HD 189733, elle recevrait trop de puissance par mètre carré.