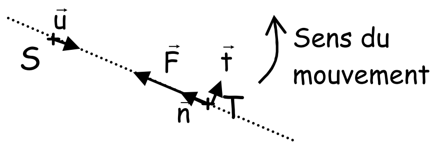
Corrigé de l'exercice 2 : «Voyage autour de Saturne»

1- Quelques caractéristiques de Titan :

1.1 *Forces*

1.1.1 Titan subit la force d'interaction gravitationnelle exercée par Saturne.

1.1.2



1.1.3 $\vec{F} = -\dfrac{GM_TM_S}{R_T^2}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la droite ST dirigé de S vers T.

1.2 *Accélération et vitesse.*

1.2.1 D'après la seconde loi de Newton, appliquée à Titan, réduit à son centre d'inertie T, dans le référentiel Saturno-centrique : $\boxed{M_T.\vec{a} = \vec{F}}$ ($\vec{F}$ étant la seule force subie par Titan).

Donc : $M_T.\vec{a} = -\dfrac{G.M_T.M_S}{R_T^2}.\vec{u}$ donc $\boxed{\vec{a} = -\dfrac{G.M_S}{R_T^2}.\vec{u}}$

1.2.2 Pour Titan, en orbite circulaire de rayon R_T autour de Saturne, on a : $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}.\vec{t} + \dfrac{v^2}{R_T}.\vec{n}$

Donc : $\boxed{a_t = \dfrac{dv}{dt} \text{ et } a_n = \dfrac{v^2}{R_T}}$

1.2.3 La force $\vec{F}$ est centripète (colinéaire à $\vec{n}$), le vecteur accélération est lui aussi centripète. Il se réduit donc à la composante normale $a_n\vec{n}$.

1.3 Type de mouvement

1.3.1 Le vecteur accélération de Titan étant normal on a donc $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$, la valeur de la vitesse v de Titan est donc constante. Le mouvement de Titan autour de Saturne est uniforme.

1.3.2 D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\vec{a} = \frac{G.M_S}{R_T^2}.\vec{n} = \frac{v^2}{R_T}.\vec{n} \Leftrightarrow \frac{G.M_S}{R_T^2} = \frac{v^2}{R_T} \Leftrightarrow v^2 = \frac{G.M_S}{R_T} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G.M_S}{R_T}}}$$

2- D'autres satellites de Saturne :

2.1.1 *Loi de Kepler*

$$v = \frac{2\pi.R}{T} = \sqrt{\frac{G.M_S}{R}} \Leftrightarrow \frac{4\pi^2.R^2}{T^2} = \frac{G.M_S}{R} \Leftrightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{G.M_S}{4\pi^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$$

2.1.2 $\dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{G.M_S}{4\pi^2} \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{G.M_S}{4\pi^2}.T^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \sqrt[3]{\dfrac{G.M_S}{4\pi^2}.T^2}}$

Soit : $R_E = \sqrt[3]{\dfrac{6,67\text{x}10^{-11}\text{x}5,69\text{x}10^{26}}{4\pi^2}\text{x}(1,37\text{x}3600\text{x}24)^2}$ = $\mathbf{2,38 \times 10^8}$ **m**

3- <u>Satellite saturno-stationnaire</u>

3.1 Un satellite saturno-stationnaire reste à la verticale du même point. Sa période de révolution est égale à la durée d'un jour sur Saturne. $T_C = T_S$.

3.2 *Altitude de la sonde*

3.2.1. On a vu à la question 2.1.2 : $R_C = \sqrt[3]{\frac{G.M_S}{4\pi^2}.T_C^2}$ où R_C est le rayon de l'orbite de la sonde Cassini.

Or $R_C = R_S + h$ et $T_C = T_S$ donc : $\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{G.M_S}{4\pi^2}.T_S^2} - R_S}$

3.2.2. h = $\sqrt[3]{\frac{6,67\text{x}10^{-11}\text{x}5,69\text{x}10^{26}}{4\pi^2}\text{x}(10\text{x}3600 + 39\text{x}60)^2} - 6,0\text{x}10^7$ = **5,2 x 10^7 m**

Pensez à convertir T_S en secondes, R_S en m